



Imagerie en milieu hétérogène : une méthode de sampling pour des mesures différentielles

L. Audibert^a, H. Haddar^b et A. Girard^c

^aINRIA - CMAP - EDF R&D, 6 quai Watier, 78401 Chatou, France

^bINRIA - CMAP, CMAP, Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France

^cEDF R&D, 6 quai Watier, 78401 Chatou, France

lorenzo.audibert@edf.fr

Nous allons présenter une méthode d'imagerie qualitative capable d'imager des défauts dans un environnement complexe et inconnu à partir de mesures différentielles de l'opérateur de champ lointain (ou Full Matrice Capture). La principale difficulté vient de la présence d'un background inconnu. Notre approche exploite le principe de la Generalized Linear Sampling Method (GLSM) introduite récemment par les auteurs comme une alternative rigoureuse à la Linear Sampling Method (LSM). On donnera ici les résultats théoriques sur lesquels reposent la méthode ainsi qu'une validation numérique. Les motivations qui sous tendent ce travail étant l'identification de fissure dans le béton nous présentons également des simulations se rapprochant de ce type de configuration.

1 Introduction

On se propose ici de présenter des développements récents des méthodes dites qualitatives pour la résolution des problèmes inverses de diffraction [3] à partir de données multi-statiques pour une fréquence fixée. On s'intéresse ici tout particulièrement à l'imagerie d'un objet dans un milieu hétérogène complexe et inconnu. Les méthodes qualitatives telles que la LSM [2], la méthode de factorisation (FM) [1] ou la GLSM [4], s'étendent à des milieux hétérogènes mais uniquement si la solution fondamentale de celui-ci est connue. Cela restreint leurs perspectives d'applications. On se propose ici de présenter les résultats que l'on a obtenus dans le cas où des mesures avant et après l'apparition du défaut sont disponibles. Notre méthode [5] propose en ce sens une caractérisation exacte du défaut ou de l'objet diffractant déjà existant qui le contient. Afin d'expliquer les fondements de cette méthode il est nécessaire de rappeler les principaux résultats de la GLSM, en ce sens on passe directement à la formulation dans le cas de données bruitées et on s'abstient de fournir les démonstrations des résultats obtenus. On obtient ainsi l'algorithme de sampling qui se caractérise par un problème relativement simple à résoudre et qui ne nécessite pas d'appel à un solveur du modèle direct de l'équation des ondes. Notre méthode d'imagerie différentielle repose sur l'application indépendante à chacun des jeux de données de la GLSM et en l'exploitation des propriétés de ces solutions, décrites par le fait qu'elles soient solutions d'un système d'équations différentielles, le problème de transmission intérieur. Ces caractéristiques font que notre méthodologie hérite des avantages de simplicité et d'efficacité numérique des méthodes qualitatives sans connaître la fonction de Green du milieu hétérogène. Cet article est organisé comme suit. Dans la première partie on expose succinctement le problème de diffraction et on introduit les principales notations. Puis on rappelle les résultats de la GLSM avant de présenter notre méthode d'imagerie différentielle. Finalement on expose des résultats numériques sur des cas académiques puis sur des simulations se rapprochant de l'imagerie de fissure dans du béton.

2 Notation et problème modèle

On se limitera au cas des ondes acoustiques avec des sources qui sont des ondes planes et des mesures en champ lointain. Cette restriction au champ lointain est due à une volonté de limiter la complexité des équations, des simulations en champ proche plus conforme aux problématiques de contrôle non destructif (CND) sont présentées dans la partie 5. On a donc pour un nombre d'onde, $k > 0$ le champ total qui obéit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d$$

pour $d = 2$ ou 3 et n l'indice de refraction qui vérifie $\Im(n) \geq 0$. Par ailleurs on désigne par \bar{D} le support $n-1$. Ce qui revient à considérer la réfraction par un obstacle D dans un milieu d'indice 1. On considère que D est un domaine borné, de complémentaire connecté et dont les bords sont Lipschitz. On s'intéresse au cas où le champ total, u , est généré par une onde plane incidente, $u^i(\theta, x) := e^{ikx \cdot \theta}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ (la sphère unité). On introduit également le champ diffracté u^s défini par :

$$\begin{cases} u^s(\theta, \cdot) := u - u^i(\theta, \cdot) \text{ in } \mathbb{R}^d, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Nos données pour le problème inverse seront constituées d'une version bruitée du champ lointain $u^\infty(\theta, \hat{x})$ défini par le développement suivant : $u^s(\theta, x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(d-1)/2}} (u^\infty(\theta, \hat{x}) + O(1/|x|))$ pour $|x| \rightarrow \infty$ et pour tous $(\theta, \hat{x}) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1}$. L'objectif sera alors de reconstruire D à partir de ces données en exploitant une nouvelle méthode de sampling. Cette méthode associée à ces données l'opérateur de champ lointain défini par :

$$Fg(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^\infty(\theta, \hat{x}) g(\theta) ds(\theta).$$

La linéarité de l'équation des ondes fait que Fg est en fait simplement le champ lointain diffracté par D pour une onde incidente v_g :

$$v_g(x) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{ikx \cdot \theta} g(\theta) ds(\theta), \quad g \in L^2(\mathbb{S}^{d-1}), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Afin de justifier les techniques de résolution du problème inverse on va introduire deux décompositions de F . Ces décompositions explicitent le phénomène de diffraction par D d'une onde incidente. Premièrement on introduit l'opérateur (compact) $H : L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L^2(D)$ défini comme :

$$Hg := v_g|_D. \quad (2)$$

Pour cette onde incidente l'objet D rayonne un champ diffracté, w qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta w + nk^2 w = k^2(1-n)v_g \text{ in } \mathbb{R}^d, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} - ikw \right|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (3)$$

et dont on mesure le champ lointain w^∞ . On peut donc construire l'opérateur (compact) $G : \overline{\mathcal{R}(H)} \subset L^2(D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ défini comme :

$$Gv_g|_D := w^\infty,$$

ce qui revient à écrire que $F = GH$. Cette décomposition met en évidence le champ incident et la diffraction de celui-ci par D . La seconde factorisation de F va consister à décomposer

G afin de mettre en évidence que l'objet diffracte dans un milieu connu. Le champ lointain de w s'exprime de la façon suivante :

$$w^\infty(\hat{x}) = - \int_D e^{-iky \cdot \hat{x}} (1-n)k^2(v_g(y) + w(y))dy,$$

sachant par ailleurs que l'adjoint de $H, H^* : L^2(D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ s'exprime :

$$H^* \varphi(\hat{x}) := \int_D e^{-iky \cdot \hat{x}} \varphi(y)dy, \quad \varphi \in L^2(D), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

en introduisant $T : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ défini comme :

$$Tv_g := -k^2(1-n)(v_g + w), \quad (4)$$

avec w défini précédemment. On obtient $F = H^*TH$. Une propriété essentielle de T est que si $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\Im(n) \geq 0$ et que l'on a existence de $n_0 > 0$ tel que $1 - \Re(n(x)) + \Im(n(x)) \geq 0$ ou $\Re(n(x)) - 1 + \Im(n(x)) \geq 0$ pour $x \in D$, alors T est coercif. Sachant que T est également borné on a que :

$$\mu \|Hg\|_{L^2(D)}^2 \leq |\langle Fg, g \rangle| \leq \|T\|^2 \|Hg\|_{L^2(D)}^2 \quad (5)$$

Par conséquent $|\langle Fg, g \rangle|$ est un ersatz de $\|Hg\|_{L^2(D)}^2$ qui se calcule uniquement à partir des données disponibles.

3 Une caractérisation exacte du support de l'objet diffractant

Afin de déterminer D nous nous plaçons dans le cadre de ce qui est appelé les "méthodes qualitatives". La Linear Sampling Method (LSM) et la Factorisation Method (FM) constituent deux exemples de ce type de méthode. Ici nous allons rappeler les résultats d'une méthode introduite par les auteurs sous le nom de Generalized Linear Sampling Method (GLSM). Cette méthode fournit une caractérisation exacte de D à partir de F . Comme la LSM, elle repose sur le caractère résolvable du problème de transmission intérieure défini par $(u, v) \in L^2(D) \times L^2(D)$ tel que $u - v \in H^2(D)$ et

$$\text{ITP}(D, f, g, n) = \begin{cases} \Delta u + k^2 nu = 0 & \text{in } D, \\ \Delta v + k^2 v = 0 & \text{in } D, \\ (u - v) = f & \text{on } \partial D, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(u - v) = g & \text{on } \partial D, \end{cases} \quad (6)$$

pour $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ et $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$.

Hypothèses 1 Nous supposons que $k^2 \in \mathbb{R}_+$ et n sont tel que quelque soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ et $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ alors $\text{ITP}(D, f, g, n)$ admet une unique solution $(u, v) \in L^2(D) \times L^2(D)$ tel que $u - v \in H^2(D)$.

Cette hypothèse est vérifiée [6] pour tout les $k^2 \in \mathbb{R}_+$ à l'exception d'un ensemble dénombrable sans point d'accumulation si n vérifie $1/(n-1) \in L^\infty(D)$ et $\Re(n-1)$ est définie positive ou négative au voisinage de ∂D . On introduit le champ lointain de la fonction de Green :

$$\phi_z(\hat{x}) := e^{-ik\hat{x} \cdot z}$$

et l'ingrédient essentiel de la GLSM :

Théorème 1 ϕ_z est dans l'image de G si et seulement si $z \in D$

Une façon de réaliser une image de D est donc de tester si ϕ_z appartient à l'image de G qui est à la fois compact et dense. Bien évidemment cela est impossible car on ne dispose pas de G en pratique. La GLSM permet un tel test en ayant recours uniquement à F . Évidemment la compacité de G implique que F l'est également. Lorsque l'on va vouloir chercher un antécédent à ϕ_z on va donc être face à un problème mal posé. Une solution consiste à régulariser ce problème mais d'une façon particulière afin d'obtenir une caractérisation de l'obstacle. Pour ce faire on introduit la fonction coût suivante :

$$J_\alpha^\delta(\phi; g) := \alpha(|\langle F^\delta g, g \rangle| + \delta \|g\|^2) + \|F^\delta g - \phi\|^2, \quad (7)$$

où F^δ est la version bruitée de F avec δ tel que $\|F^\delta - F\| \leq \delta$. Le fait que F et F^δ soient compact et d'image dense fait que $J_\alpha^\delta(\phi; \cdot)$ admet un minimum, $g^{\alpha, \delta}$ et a le comportement limite suivant :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} J_\alpha^\delta(\phi; g^{\alpha, \delta}) = 0.$$

Le théorème suivant nous donne une fonction indicatrice qui permet de réaliser une image de D

Théorème 2 Pour g_α^δ le minimum de $J_\alpha^\delta(\phi; \cdot)$ On a le comportement suivant :

- $\phi \in \mathcal{R}(G)$ implique

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(|\langle F^\delta g^{\alpha, \delta}, g^{\alpha, \delta} \rangle| + \delta \|g^{\alpha, \delta}\|^2 \right) < \infty$$

- $\phi \notin \mathcal{R}(G)$ implique

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 0} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(|\langle F^\delta g^{\alpha, \delta}, g^{\alpha, \delta} \rangle| + \delta \|g^{\alpha, \delta}\|^2 \right) = \infty$$

Ce théorème nous suggère donc de minimiser $J_\alpha^\delta(\phi_z; \cdot)$ pour chaque point z sur une grille dans laquelle on s'attend à trouver le défaut et à considérer :

$$I(z) = \frac{1}{|\langle F^\delta g_z^{\alpha, \delta}, g_z^{\alpha, \delta} \rangle| + \delta \|g_z^{\alpha, \delta}\|^2}$$

qui devrait donner une image de l'objet diffractant.

Par ailleurs on peut démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 1 Quand $z \in D$, on a que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} Hg_z^{\alpha, \delta} = v$ avec v solution de $\text{ITP}(D, \Phi_z, \frac{\partial \Phi_z}{\partial \nu}, n)$ définie par (6).

Remarque 1 On peut remplacer $|\langle F^\delta g^{\alpha, \delta}, g^{\alpha, \delta} \rangle|$ par $|\langle B^\delta g^{\alpha, \delta}, g^{\alpha, \delta} \rangle|$ si jamais $B = H^*TH$. Cette propriété sera utilisée dans la partie simulation numérique.

4 Imagerie des composants anormaux dans un milieu complexe et inconnu

La méthodologie précédente permet de reconstruire D . Dans le cas où le défaut que l'on cherche à imager se trouve dans un matériau hétérogène inconnu, alors l'ensemble des hétérogénéités vont être considérées comme des objets diffractants et l'image obtenue ne donnera pas d'information sur le défaut en question. Une manière de remédier à ce problème est de s'intéresser au cas où on dispose de

mesure différentielle. C'est à dire que l'on a accès à deux jeux de mesure et que l'on souhaite réaliser une image des changements qui sont intervenus dans le milieu. Une hypothèse essentielle de la méthode que l'on va développer dans cette partie, est que le milieu hétérogène inconnu est constitué d'une union disjointe d'objet diffractant. Cela se traduit par le fait que l'on note $\bar{D}_0 = \text{supp}(n_0 - 1)$ est une union de domaine borné simplement connecté dont la frontière est Lipschitz. La modification de ce milieu Ω ($\bar{\Omega} = \text{supp}(n - n_0)$) est un domaine borné de frontière Lipschitz et dont le complémentaire est connecté. On note $\bar{D} = \text{supp}(n - 1)$. Finalement on fait la distinction entre les composantes de $D_0 : D_{0,i}$ qui n'intersectent pas Ω et D_i celles qui intersectent Ω , ce qui veut dire que $D_0 = \bigcup_i D_{0,i} \cup \bigcup_i D_i$. On note $\tilde{\Omega}$ la partie de Ω qui n'intersecte pas D_0 .

Étant donné que l'on dispose de deux jeux de mesures on dispose de deux opérateurs de champ lointain F_0 et F , de deux fonctionnelles $J_{0,\alpha}^\delta(\phi_z; \cdot)$ et $J_\alpha^\delta(\phi_z; \cdot)$ et de leur deux minimiseurs $g_{0,z}^{\alpha,\delta}$ et $g_z^{\alpha,\delta}$.

Le corollaire 1 nous montre que $Hg_z^{\alpha,\delta}$ est relié au problème de transmission intérieure et le théorème suivant explicite le lien entre le problème de transmission intérieure associé à D et celui associé à D_0 .

Théorème 3 *Sous les hypothèses de la partie 3, on a le lien suivant entre les solutions $(u, v) \in L^2(D) \times L^2(D)$ (resp. $(u_0, v_0) \in L^2(D_0) \times L^2(D_0)$) de ITP($D, \Phi_z, \frac{\partial \Phi_z}{\partial \nu}, n$) (resp. ITP($D_0, \Phi_z, \frac{\partial \Phi_z}{\partial \nu}, n_0$)) tel que $u - v \in H^2(D)$ (resp. $u_0 - v_0 \in H^2(D_0)$):*

- si $z \in D_{0,i}$, $\forall i$, on a que $v = v_0$ dans D_0
- si $z \in D_i$, $\forall i$, on a que $v \neq v_0$ in D_i et $v = v_0$ dans $D_0 \setminus D_i$

En exploitant le fait que $|\langle Fg, g \rangle|$ soit un ersatz de $\|Hg\|_{L^2(D)}^2$ mais cette fois appliqué à $|\langle F(g_z^{\alpha,\delta} - g_{0,z}^{\alpha,\delta}, g_z^{\alpha,\delta} - g_{0,z}^{\alpha,\delta}) \rangle|$, on va pouvoir exploiter le théorème précédent pour réaliser une image, pour ce faire on introduit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(g) &= |\langle F^\delta g, g \rangle| + \delta \|g\|^2 \\ \mathcal{A}_0(g) &= |\langle F_{0,0}^\delta g, g \rangle| + \delta \|g\|^2 \\ \mathcal{D}(g, g_0) &= \frac{1}{|\langle F_0^\delta(g - g_0), g - g_0 \rangle|} \end{aligned}$$

En utilisant ces quantités on peut démontrer le théorème suivant qui permet d'imager $\tilde{\Omega}$ et $\bigcup_i D_i$. C'est à dire les objets diffractants qui sont apparus entre les deux acquisitions et les objets diffractants modifiés entre les deux acquisitions.

Théorème 4 *Avec $g_z^{\alpha,\delta}$ et $g_{0,z}^{\alpha,\delta}$, on a les deux caractérisations suivantes pour les objets qui sont apparus entre les deux acquisitions :*

- si $z \in \{\mathbb{R}^d \setminus D\} \cup \bigcup_i D_{0,i}$ on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) = \infty \quad (8)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{A}_0(g_{0,z}^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) = \infty \quad (9)$$

- si $z \in \bigcup_i D_i$ on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) < \infty \quad (10)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{A}_0(g_{0,z}^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) < \infty \quad (11)$$

- si $z \in \tilde{\Omega}$ on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) < \infty \quad (12)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{A}_0(g_{0,z}^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})) = \infty \quad (13)$$

Ce théorème nous suggère donc de calculer pour chaque point z , $g_z^{\alpha,\delta}$ et $g_{0,z}^{\alpha,\delta}$, en minimisant les deux fonctions de coût indépendantes $J_{0,\alpha}^\delta(\phi_z; \cdot)$ et $J_\alpha^\delta(\phi_z; \cdot)$. Les indicatrices suivantes nous donnerons respectivement une image de $D_0, D, \bigcup_i D_i$ et $\tilde{\Omega} \cup \bigcup_i D_i$:

$$\mathcal{I}_{D_0}(z) = \frac{1}{|\langle F_{0,0}^\delta g_{0,z}^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta} \rangle| + \delta \|g_{0,z}^{\alpha,\delta}\|^2}$$

$$\mathcal{I}_D(z) = \frac{1}{|\langle F^\delta g_z^{\alpha,\delta}, g_z^{\alpha,\delta} \rangle| + \delta \|g_z^{\alpha,\delta}\|^2}$$

$$\mathcal{I}_M(z) = \frac{1}{\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{A}_0(g_{0,z}^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})}$$

$$\mathcal{I}_T(z) = \frac{1}{\mathcal{A}(g_z^{\alpha,\delta}) + \mathcal{D}(g_z^{\alpha,\delta}, g_{0,z}^{\alpha,\delta})}$$

5 Exemples numériques

Les simulations numériques ont été réalisées en deux dimensions dans un contexte discret. Le nombre d'ondes incidentes est N , ce qui revient à dire en identifiant \mathbb{S}^1 à l'intervalle $[0, 2\pi[$, que l'on considère les champs incidents $u^j(\frac{2\pi j}{N}, \cdot)$, $j \in \{0 \dots N-1\}$. Les données du problème inverse sont calculées en utilisant une méthode intégrale disponible dans le solveur [?], ce qui fournit une version discrète de l'opérateur de champ lointain; la matrice $F := (u^\infty(\frac{2\pi j}{N}, \frac{2\pi k}{N}))_{0 \leq j, k \leq N-1}$. On obtient une version bruitée de cette matrice F_N^δ où $(F^\delta)_{j,k} = (F)_{j,k}(1 + \sigma N_{ij})$ pour $\sigma > 0$ et N_{ij} une variable aléatoire complexe distribuée uniformément dans $[-1, 1]^2$. On considère $\Phi_z \in \mathbb{C}^N$, le vecteur définie par $\Phi_z(j) = \phi_z(\frac{2\pi j}{N})$ pour $0 \leq j \leq N-1$.

Minimiser la fonctionnelle $J_\alpha^\delta(\phi_z; \cdot)$ est une tâche complexe dans le sens où elle est non différentiable et non convexe. On propose dans [4] une méthodologie qui est couteuse en temps de calcul. On va suivre ici une approche différente, en effet les travaux de Kirsch et collaborateurs synthétisés dans [1] montre que pour le cas qui nous intéresse ici il est pertinent de considérer $B^\delta = F^\delta = |Re F| + |Im F|$ où on a $Re F = \frac{F+F^*}{2}$ et $Im F = \frac{F-F^*}{2i}$. Cet opérateur vérifie bien une factorisation du type : $B = H^*TH$ avec T coercif mais surtout il admet une racine carrée autoadjointe définie positive. Ce qui permet d'avoir une nouvelle fonctionnelle

$J_\alpha^\delta(\phi_z; \cdot)$ convexe, différentiable et de minimum simple à calculer.

$$J_\alpha^\delta(\phi; g) := \alpha \left(\|F_\#^{\delta, \frac{1}{2}} g\|^2 + \delta_\# \|g\|^2 \right) + \|F^\delta g - \phi\|^2, \quad (14)$$

$$g_z^{\alpha, \delta} = (\alpha(F_\#^\delta + \delta_\# Id) + F^{\delta, *})^{-1} F^{\delta, *} \phi_z$$

L'ensemble des figures sont graduées en λ . On présente tout d'abord des résultats sur un exemple simple, dans cet exemple $\tilde{\Omega} = \emptyset$, la figure 1 représente la configuration. Les figures 2,3 et 4 montrent les résultats d'imageries associées.

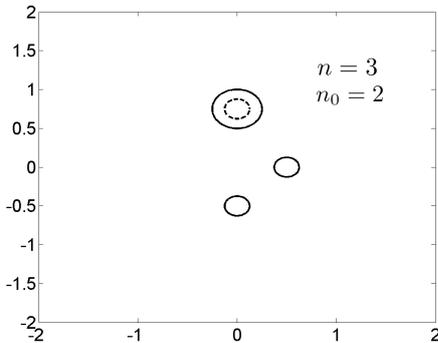


FIGURE 1 – En trait plein D_0 et en trait pontillé Ω

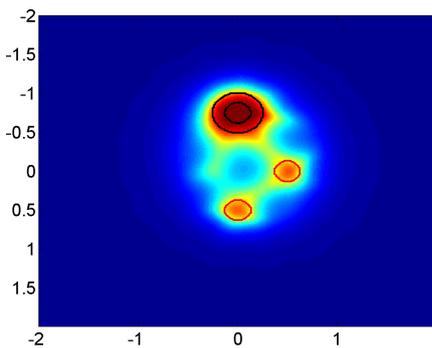


FIGURE 2 – I_{D_0}

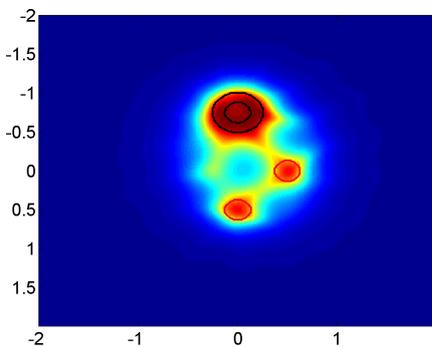


FIGURE 3 – I_D

On peut également s'intéresser au cas où $\tilde{\Omega} \neq \emptyset$. La figure 1 représente la configuration. Les figures 2,3 et 4 montrent les résultats d'imageries associées.

Finalement on présente 3 situations dans lesquelles on a un milieu de type béton, c'est à dire des granulats inclus dans du mortier. La figure 10 montre l'indice n_0 avec une fissure à l'intérieur d'un des granulats, on voit le résultat de

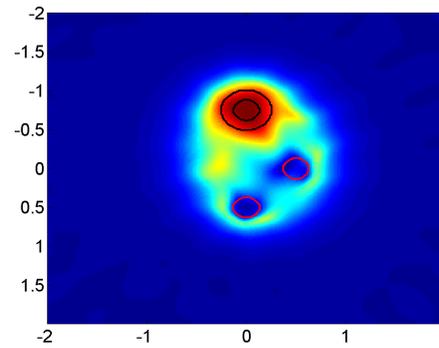


FIGURE 4 – I_M

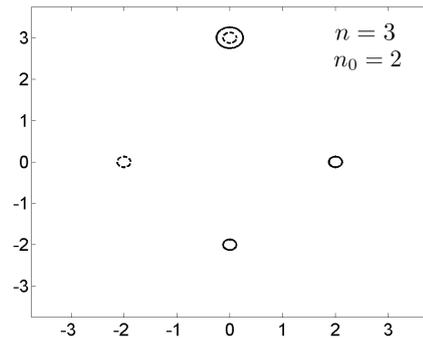


FIGURE 5 – En trait plein D_0 et en trait pontillé Ω

la méthode sur la figure 11. De la même façon la figure 12 montre l'indice n_0 avec une fissure entre les granulats, on voit le résultat de la méthode sur la figure 13. Pour obtenir ces résultats il est nécessaire de réaliser quelques modifications sur les méthodes présentées dans cet article. Notamment il faut remplacer ϕ_z par $\frac{\partial \phi_z}{\partial v(z)}$ comme expliqué dans [7] et choisir B de façon à avoir la seconde factorisation pour des données en champ proche comme expliqué dans [1].

Références

- [1] A. Kirsch and N. Grinberg, *The factorization method for inverse problems (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications vol 36)* (Oxford : Oxford University Press)
- [2] F. Cakoni and D. Colton, *Qualitative methods in inverse scattering theory, Interaction of Mechanics and Mathematics* (Berlin : Springer).
- [3] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and Electromagnetic scattering theory (Applied mathematical Sciences vol 93)* 3rd edn (New York Springer)
- [4] L. Audibert and H. Haddar, *A generalized formulation of the linear sampling method with exact characterization of targets in terms of farfield measurements*, Inverse Problems 30 035011
- [5] L. Audibert, H. Haddar and A. Girard, *Selecting anomalous components in unknown complex background*, submitted

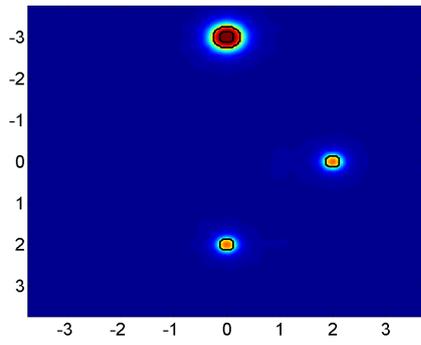


FIGURE 6 – \mathcal{I}_{D_0}

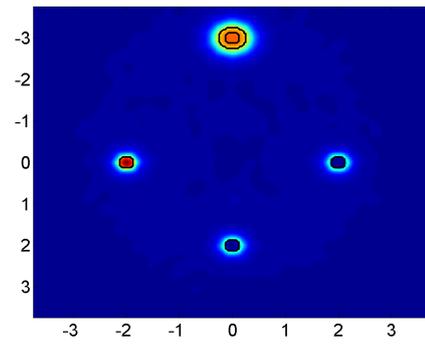


FIGURE 8 – \mathcal{I}_T

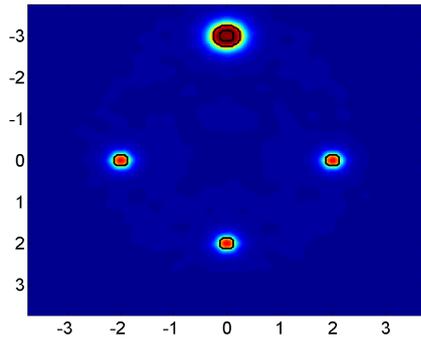


FIGURE 7 – \mathcal{I}_D

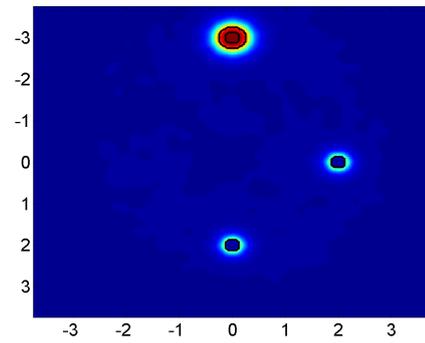


FIGURE 9 – \mathcal{I}_M

[6] J. Sylvester, *Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators*, SIAM J. Math. Anal., 44(1) :341-354, 2012

[7] Y. Boukari and H. Haddar, *The Factorization method applied to cracks with impedance boundary conditions*, Inverse Problems and Imaging 7 1123-38

[8] H. Haddar, *Sampling 2D*, <http://sourceforge.net/projects/samplings-2d/>.

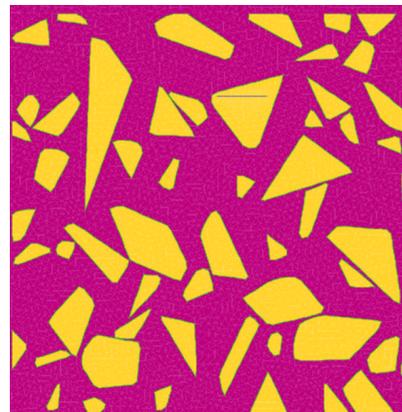


FIGURE 10 – indice n_0 avec une fissure interne dans un granulat

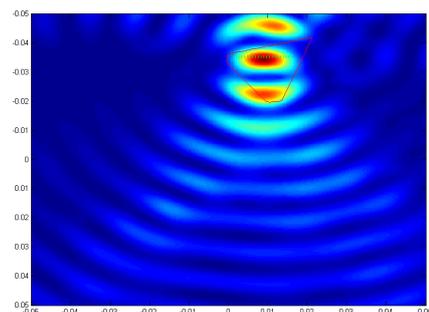


FIGURE 11 – \mathcal{I}_T

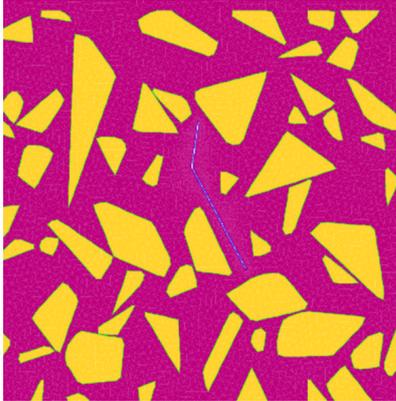


FIGURE 12 – indice n_0 avec une fissure entre les granulats

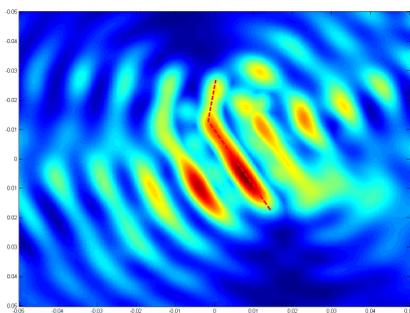


FIGURE 13 – \mathcal{I}_T