



Vibrations de poutres sous différentes conditions d'appuis

K. Falek, F. Chalah et L. Rezgui Chalah
usthb/fgc, usthb fgc bab ezzouar alger, 16331 Alger, Algérie
kfalekgc@yahoo.fr

Différentes approches sont généralement utilisées dans l'analyse dynamique de poutres vibrant transversalement. Dans cette étude, les hypothèses de la théorie d'Euler-Bernoulli ont servi de base aux calculs. Les équations d'équilibre décrivant le mouvement résultent de la résolution d'une équation différentielle du quatrième ordre. Les valeurs et vecteurs propres d'une structure ont été déterminés à partir de la méthode de Jacobi. L'essentiel de cette étude est basé sur la méthode des éléments finis. Tout d'abord, nous avons présenté les résultats obtenus par J.F. Murphy par une solution algébrique, pour une poutre simplement appuyée avec deux consoles d'égale longueur, puis nous avons effectué une comparaison avec les valeurs obtenues résultant de la méthode utilisée. Ensuite nous avons développé plusieurs cas de poutres reposant sur différents types d'appuis, avec et sans consoles. Les résultats obtenus, nous ont permis de déterminer la loi de variation de la fréquence fondamentale à partir du rapport de la partie en console sur la longueur totale de la poutre.

1 Introduction

Dans le cas des poutres vibrant transversalement, la détermination de la fréquence fondamentale se fait en résolvant une équation différentielle du quatrième ordre. De nombreux travaux de recherche ont été menés sur l'analyse dynamique des poutres vibrantes transversalement en considérant différentes conditions aux limites. Pour les cas les plus simples, l'utilisation de la résolution d'équation différentielle permet la détermination de la fréquence fondamentale. De plus, le quotient de Rayleigh donne une valeur d'estimation de cette dernière, qui est basée sur une hypothèse de la forme du premier mode, obtenue à partir de la courbe classique de déformation d'une poutre chargée par sa masse linéique répartie. En outre, la méthode des éléments finis introduite dans [1-3] est appliquée avec différentes méthodes numériques, constituant un code général adapté et mis en œuvre en langage Fortran. Dans la présente étude, nous avons considérés des hypothèses élastiques.

Pour l'application de la MEF, la structure est idéalisée et divisée en centaine éléments dont la rigidité et la masse des matrices résultent de l'assemblage de ces matrices élémentaires. Au niveau de leurs nœuds définis par la géométrie de la structure à mailles, les déplacements sont d'abord trouvés et utilisés comme entrée pour la poursuite de l'analyse afin d'évaluer les contraintes et les déformations. En second lieu, pour procéder à l'analyse dynamique, la méthode de Jacobi a été utilisée pour trouver tous les modes.

De nombreux travaux de recherche ont été effectués sur la vibration des poutres comme rapporté dans la littérature [4] et des explications supplémentaires, peuvent être trouvées dans [5,6]. Aussi, de nombreux développements récents sont liés à un autre type d'approche pour la résolution par le problème inverse pour trouver la forme des structures régulières comme indiqué [7] et largement étudié dans [8-10]. La comparaison des résultats de FEM pour la vibration transversale d'une poutre en appui simple avec deux consoles à ceux donnés par une solution algébrique exposée par [11], est présentée.

Pour de plus amples recherches, l'étude pourra tenir compte de la déformation de cisaillement négligée, de l'effet axial et de l'inertie giratoire.

2 Rappel théorique

Le schéma suivant décrit l'équilibre d'un élément de poutre dx sous l'action de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

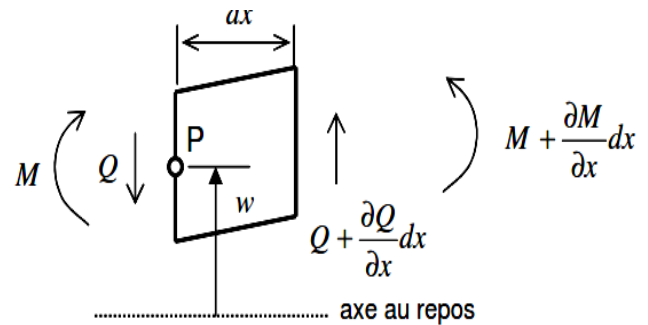


Figure 1: Equilibre d'un élément de poutre dx sous l'action de l'effort tranchant et du moment fléchissant

Q est l'effort tranchant. Le moment de flexion s'exprime par la relation suivante :

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

En supposant que les sections droites ne se déforment pas, et en négligeant les déformations dues au cisaillement, l'équation d'équilibre des forces peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] - Q(x, t) + f(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

L'équilibre des moments au point P permet d'écrire :

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + \left[f(x, t) dx \right] \frac{dx}{2} = 0 \quad (3)$$

Comme dx est petit, $(dx)^2$ est négligeable.

$$\left[\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) \right] dx + \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + \frac{f(x, t)}{2} \right] (dx)^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{D'où} \quad Q(x, t) = -\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (5)$$

En remplaçant Q par M dans l'équation d'équilibre des forces, nous obtenons :

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx + f(x,t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (7)$$

Dans le cas où la densité des forces extérieures est nulle, on obtient l'équation suivante :

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

Où :

E est le module d'élasticité,

I : est le moment d'inertie,

ρA : est la densité par la section transversale ou la masse par unité de longueur

Nous nous sommes référés à la théorie d'Euler-Bernoulli qui ne considère pas les déformations de la section droite dues au cisaillement et qui néglige l'effet d'inertie de rotation.

Pour la résolution de ces équations, il est nécessaire de connaître les conditions aux limites. Celles-ci sont déterminées à partir de la définition du mouvement de flexion:

Déplacement du à la flexion :
w(x,t)

Déplacement angulaire (rotation) du à la flexion :

$$\theta(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

Moment de flexion :

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

Effort tranchant :

$$Q(x,t) = -EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}$$

Si une solution en variables séparées est recherchée, de la forme $w(x,t)=X(x).T(t)$, l'équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mu^2 \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (9)$$

A partir de là, il est possible de déterminer les deux fonctions introduites (temporelle et spatiale)

Pour la fonction temporelle, on peut écrire

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (10)$$

d'où

$$T(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (11)$$

Pour la fonction spatiale est obtenue, l'équation suivante est obtenue :

$$X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{\mu^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (12)$$

Ce qui donne :

$$X(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (13)$$

Pour déterminer la valeur des quatre coefficients, il suffit de se référer aux conditions aux limites.

3 Matrices de Rigidité et de masse des éléments de poutres

Dans cette étude, la compression est négligée et seule la vibration transversale est considérée.

La poutre est divisé en deux cents éléments où les matrices de rigidité élémentaire et de masse sont [Ke] et [Me].

3.1 Matrice de rigidité de la poutre

Classiquement, les coefficients de rigidité peuvent être généralement déduits soit par la méthode de déplacement, soit en utilisant par la méthode des éléments finis

Il existe seize termes pour l'expression de la matrice de rigidité de l'élément de poutre en tenant compte de la forme symétrique de la matrice (4 termes diagonaux et 6 hors diagonales). Les déformations de la poutre sont décrits comme étant des fonctions des rotations d'extrémité et des déplacements ((v_1, θ_1, v_2 and θ_2), comme indiqué ici:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

où:

L : longueur de la poutre

T : effort tranchant

M : moment fléchissant

3.2 Représentation de la Matrice de Masse M

Pour effectuer une analyse dynamique d'un problème structurel une forme compatible est généralement considérée comme la masse élémentaire. Cette situation

induit l'existence des termes non nuls en dehors de la diagonale

La représentation de la matrice élémentaire de la masse est donnée par la formulation suivante:

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3.3 Quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh largement utilisé, déduit du principe de conservation totale de l'énergie, exprimée par l'Eq.16 constitue un bon outil pour trouver la première fréquence de mode de vibration appelé fondamental. Il utilise une fonction normalisée correspondant à la fonction de déplacement de la charge due à la distribution linéaire constante de la masse de la poutre Cette fonction normalisée constitue une approximation de la première forme de mode de vibration.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\int EI (\Psi''(x))^2 dx}{\int m (\Psi(x))^2 dx}} \quad (16)$$

où:

m : densité de masse linéaire de la poutre

4 Résultats

La méthode utilisée pour la détermination des fréquences propres est celle de Jacobi. Cette dernière est un processus itératif utilisé pour résoudre un problème de valeurs propres général. La méthode de calcul des valeurs propres de Jacobi consiste à réaliser, sur les matrices de rigidité et de masse, des pré et post multiplications, par des matrices de rotation, jusqu'à ce que leurs formes finales deviennent diagonales.

L'étude montre les différentes valeurs de fréquence ω en fonction de $(EI/\rho AL^4)^{1/2}$, obtenues par

- la méthode théorique exposée,
- à partir de la méthode de Rayleigh,

Et proposées par [12] pour les poutres étudiées.

Avec

$$\omega_1 = \alpha \cdot \sqrt{\frac{E.I}{\rho.A.L^4}} \quad (17)$$

Nous proposons l'étude de certaines poutres dont les liaisons aux extrémités sont différentes.

Six cas sont présentées dans le tableau 1 et qui sont dans l'ordre : appuyée-appuyée, encastrée-libre,

Appuyée-encastrée, encastrée-encastrée, guidée-appuyée, guidée-encastrée.

Tableau 1. Paramètre adimensionnel α pour les valeurs des fréquences

Beam case	Ends restraints	Obtained results	Referenced values	Rayleigh issued
1	Pinned-pinned	9.8696 /11 elements	$9.8696 \approx \pi^2$	9.87666
2	Clamped-free	3.5160 / 6 elements	3,5160	3.53009
3	Pinned-fixed	15.4182 / 16 elements	15,4182	15.4511
4	Clamped-clamped	22.3733 / 19 elements	22,3729	22.4499
5	Guided-pinned	2.4674 / 4 elements	2.4674 [12]	2.46916
6	Guided-fixed	5.5933 / 9 elements	5.5858 [12]	5.61249

5 Extension à l'analyse des vibrations transversales d'une poutre simplement supportée avec des consoles symétriques d'égale longueur.

Soit la poutre sur deux appuis avec deux consoles d'égale longueur suivante : la dimension des consoles est représentée par δ , et S la distance entre les deux appuis.

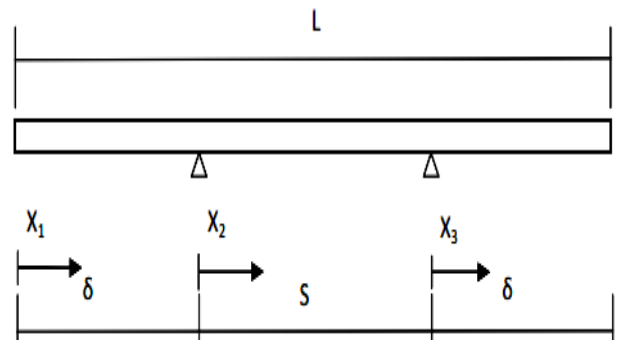


Figure 2. Représentation d'une poutre simplement appuyée avec deux consoles symétriques d'égales longueurs.

Les conditions nodales générales sont :

Pour $x_1 = 0$,

$$d^2 X_1 / dx_1^2 = 0 \text{ et } d^3 X_1 / dx_1^3 = 0$$

Pour $x_1 = \delta$ $x_2 = 0$,

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

$$dX_1 / dx_1 - dX_2 / dx_2 = 0 \text{ et } d^2 X_1 / dx_1^2 - d^2 X_2 / dx_2^2 = 0$$

Pour $x_2 = S$ $x_3 = 0$,

$$X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

$$dX_2 / dx_2 - dX_3 / dx_3 = 0 \text{ et } d^2 X_2 / dx_2^2 - d^2 X_3 / dx_3^2 = 0$$

Pour $x_3 = \delta$,

$$d^2 X_3 / dx_3^2 = 0 \text{ et } d^3 X_3 / dx_3^3 = 0$$

La fréquence fondamentale est donnée par la relation de l'Eq.18.:

$$f = \left(\frac{k^2}{2\pi} \right) \cdot \sqrt{\frac{E.I}{\rho.A}} \quad (18)$$

Une constante K_1 est définie en [11] et introduite pour exprimer la racine fondamentale transformée de la fréquence

$$K_1 = \left(\frac{(kl)^4}{4\pi^2} \right) \quad (19)$$

En faisant varier le rapport S/L de 0 à 1, une courbe est dessinée dans la (Fig.3.):

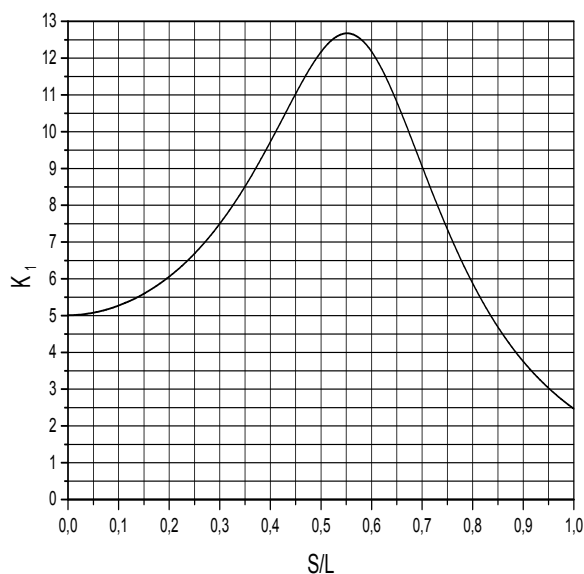


Figure 3. Variation de K_1 en fonction du rapport S/L .

Cette méthodologie est appliquée pour analyser la vibration transversale d'une poutre en appui simple avec des consoles symétriques de longueur variable et égale, comme dessiné sur la Fig. 2. Cet exemple a été étudié dans [11]. Afin d'obtenir des résultats comparables de la courbe, les valeurs limites ont été trouvées avec une bonne entente (2.467 et 5.010 à $S/L = 0$ et 1 respectivement) et un grand nombre d'éléments a été appliqué en particulier pour l'évaluation de la valeur intermédiaire à $S/L = 0,552$ pour qui $K_1 = 12,679$ correspondant à une poutre libre-libre (0,55 et 12,6789 respectivement dans cette étude).

Pour de petites valeurs de δ et en ignorant les consoles, les travaux référencés en [11] suggèrent une expression de K_1 donnée en Eq.20.:

$$K_1 \approx 2.467 \cdot \frac{L^4}{S^4} \quad (20)$$

6 Conclusion

La première phase de cette analyse a porté sur les comparaisons des valeurs numériques avec la théorie, pour un élément de poutre en porte à faux oscillant, constitué d'un ensemble de pièces assemblées avec des longueurs égales et des caractéristiques géométriques, mécaniques constantes. Ensuite, les investigations numériques ont concernés certains problèmes classiques de vibrations de poutres avec différentes conditions aux limites et les résultats sont à chaque fois comparés à ceux trouvés dans la littérature et ceux obtenus par le quotient de Rayleigh.

Dans une deuxième phase, la vibration transversale libre d'une poutre simplement supportée avec consoles symétriques de longueur arbitraire est également traitée. Elle est utilisée pour calculer le module d'élasticité E de la poutre étudiée pour I , S , L et W valeurs fixes. Ceci est réalisé par la simple lecture de la courbe de la valeur de fréquence modifiée en fonction du rapport S/L bien expliqué dans [11]. Comme on le voit, l'approche peut facilement être adaptée pour l'analyse d'un grand nombre de problèmes avec divers types de conditions aux appuis en évitant les formulations mathématiques complexes.

Références

- [1] K. J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
- [2] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996.
- [3] Edward L. Wilson, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA, Third Edition, 2002.
- [4] Seon M. Han, Haym Benaroya and Timothy Wei, Dynamics of transversely vibrating beams: Using four engineering theories, Journal of Sound and Vibration (1999) 225(5), 935-988.
- [5] Ray W. Clough, Joseph Penzien, Dynamics of structures, Third Edition, Computers & Structures, Inc., 2003.
- [6] Paz, Mario, Structural Dynamics Theory and Computation, Chapman & Hall, 2000.
- [7] M. Meenakshi Sundaram and G.K. Ananthasuresh, A note on the inverse mode shape problem for bars, beams, and plates, Inverse Problems in Science and Engineering, iFirst, Taylor & Francis Group, 1-16, 2012.
- [8] G.M.L. Gladwell, Inverse Problems in Vibrations, 2nd ed., Kluwer Academic Publications, Dordrecht, 2004.
- [9] M.T. Chu, Inverse eigenvalue problems, SIAM Rev. 40 (1992), pp. 1-39.
- [10] M.T. Chu and H.G. Gene, Inverse Eigenvalue Problems Theory, Algorithms, and Applications, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [11] J. F., Murphy, Transverse Vibration of a Simply Supported Beam with Symmetric Overhang of Arbitrary Length, Journal of Testing and Evaluation, JTEVA, Vol. 25, No. 5, September, 1997, pp. 522-524.
- [12] H. O. Öz, Calculation of the natural frequencies of a beam-mass system using finite element method, Mathematical & Computational Applications, Vol.5, N°2, pp.67-75, 2000.