



## **Acoustique statistique : étude de l'hypothèse de couplage faible et de l'influence des modes non-résonants pour la SEA**

T. Lafont<sup>a</sup>, N. Totaro<sup>b</sup> et A. Le Bot<sup>a</sup>

<sup>a</sup>LTDS, 36 avenue guy de collonges, 69130 Ecully, France

<sup>b</sup>LVA, INSA de Lyon, 25 bis avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France  
thibault.lafont@ec-lyon.fr

La méthode Statistical Energy Analysis (SEA), développée dans le cadre théorique de deux oscillateurs couplés, est basée sur de nombreuses hypothèses (couplage faible, excitation de type rain-on-the-roof, couplage non-dissipatif, etc). Lorsque ces hypothèses sont respectées, les énergies des oscillateurs peuvent être reliées à la puissance transmise entre eux par la relation dite de "coupling power proportionality" (CPP). Étendue aux couplages entre sous-systèmes multi-modaux, la SEA peut être appliquée à des structures complexes. Il est toutefois nécessaire de souligner que la SEA est théoriquement juste tant que toutes ses hypothèses sont respectées. Avant d'envisager d'appliquer la SEA à un système industriel, il est donc impératif de s'assurer qu'il est bien dans le domaine de validité de la SEA.

Cet article est une discussion sur l'hypothèse de couplage faible et l'influence des modes non-résonants dans l'utilisation de la SEA. Dans le cas de deux oscillateurs couplés, il est montré que la relation de CPP reste valable quelque soit la force de couplage. L'hypothèse de couplage faible n'est théoriquement nécessaire qu'à partir de trois oscillateurs couplés. Une simulation numérique est présentée et confirme cette observation. Dans ce cas la relation de CPP n'est plus vérifiée et on constate l'apparition de facteurs de couplage indirects.

Par ailleurs, il est montré que si la fréquence de résonance du troisième oscillateur est en dehors de la bande de fréquence d'excitation (c'est à dire si le mode est non-résonant) alors la relation de réciprocité établie en SEA n'est plus valable.

## 1 Introduction

La SEA (Statistical Energy Analysis) [1], est une théorie bien connue en vibro-acoustique statistique pour prédire les transferts d'énergie entre sous-systèmes excités par des forces aléatoires. Développée dans les années 60 et très utilisée en acoustique des salles, cette méthode s'est longtemps heurtée à son application difficile aux systèmes industriels complexes [2].

La SEA est basée sur la relation de "coupling power proportionality" (CPP) qui stipule que la puissance transmise entre deux sous-systèmes est proportionnelle à la différence de leurs énergies modales. L'établissement de la relation de CPP est basée sur le modèle de deux oscillateurs couplés soumis à des forces aléatoires, stationnaires, décorréliées de type bruit blanc (densité spectrale de puissance constante sur la bande de fréquence) [3]. Les relations de la SEA sont ensuite étendues aux systèmes continus en assimilant les modes à des oscillateurs mécaniques. Toutefois, dans ce cas, plusieurs hypothèses supplémentaires sont nécessaires (champ diffus, excitation Rain-on-the-roof, équipartition des énergies modales, etc). Lafont *et al.* [4] ont réalisé une étude de ces hypothèses liée à la nécessité d'avoir un champ diffus dans les sous-systèmes.

Les hypothèses liées au couplage entre sous-systèmes ont suscité beaucoup d'intérêt dans la littérature. En SEA, le couplage entre sous-systèmes doit être conservatif et faible. L'hypothèse du couplage conservatif intervient dès le début de la démonstration de la CPP, au moment de l'écriture des équations du mouvement entre deux oscillateurs. Elle permet d'écrire des équations sans terme traduisant une dissipation d'énergie. Des extensions à un couplage non-conservatif sont traitées dans les références [5, 6, 7]. L'hypothèse du couplage faible, quant à elle, n'intervient que dans le cas de trois sous-systèmes couplés ou plus [8]. Cependant, la définition d'un couplage faible est délicate et de nombreuses versions existent dans la littérature. Une étude qui propose un critère de couplage faible pour la validation de la CPP est donnée par Finnveden [9].

Théoriquement, la SEA ne peut rendre compte de l'influence des modes non-résonants. En effet, du point de vue de l'approche modale de la méthode, la présence de modes en dehors de la bande de fréquence de l'excitation est négligée. On fait ainsi l'approximation que seuls les modes compris dans la bande de fréquence d'excitation

interviennent dans le calcul des énergies vibratoires des sous-systèmes. Plusieurs études ont évaluées les contributions des modes non-résonants, en particulier Crocker et Price [10] pour la SEA en introduisant des facteurs de perte par couplage indirect et Maxit *et al.* [11] pour SmEdA (Statistical modal Energy distribution Analysis). Renji *et al.* [12] mettent en évidence que l'hypothèse de troncature modale peut être difficile à respecter dans le cas d'une plaque fine séparant deux cavités. L'étude de Cheng *et al.* [13] confirme ces dernières observations.

La présente étude s'inscrit dans la continuité des travaux précédents concernant les hypothèses de champ diffus, d'équipartition modale et d'excitation rain-on-the-roof [4]. Son objectif est l'étude des conséquences du non-respect de l'hypothèse de couplage faible et l'influence des modes non-résonants.

Dans la suite, les principaux résultats de la SEA sont rappelés (§3). Un exemple de trois oscillateurs couplés élastiquement est utilisé. Les expressions exactes des énergies vibratoires, des puissances transmises, des puissances injectées ainsi que la méthode des coefficients d'influence énergétique sont détaillés dans le chapitre (§4). Les termes de la matrice des facteurs de perte par couplage donnés par la SEA seront ainsi comparés à ceux obtenus par un calcul de référence (§5). L'influence de la force de couplage sera abordée en (§5.3) alors que l'influence des modes non-résonant sera discutée en (§5.4).

## 2 Calcul SEA

Cette section présente les expressions de la "coupling power proportionality" et de la matrice des facteurs de perte par couplage (CLF pour coupling loss factor).

On considère le cas de deux oscillateurs  $i$  et  $j$  couplés. En supposant que le couplage est conservatif et que les forces excitatrices sont des bruits blancs décorréliés, il a été démontré que l'échange d'énergie est proportionnel à la différence des énergies vibratoires [3, 8, 14, 15]. Soit,

$$P_{ij} = \eta_{ij} \omega_c (E_i - E_j) \quad (1)$$

avec  $P_{ij}$  la puissance transmise,  $\eta_{ij}$  le facteur de perte par couplage (CLF),  $\omega_c$  la fréquence centrale de la bande de fréquence d'excitation,  $E_i$  et  $E_j$  les énergies vibratoires des oscillateurs  $i$  et  $j$ . Cette équation est connue sous le nom de

”coupling power proportionality”. Le coefficient  $\beta$  est, pour un couplage élastique,

$$\beta = \eta_{ij}\omega_c = \frac{K_{ij}^2(\Delta_1 + \Delta_2)}{m_i m_j [(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + (\Delta_i + \Delta_j)(\Delta_i \omega_j^2 - \Delta_j \omega_i^2)]} \quad (2)$$

où  $\Delta_i = \lambda_i/m_i$  est la bande passante et  $\omega_i = \sqrt{(k_i + K_{ij})/m_i}$  la pulsation propre bloquée de l'oscillateur  $i$ . De plus, les CLF vérifient la relation de réciprocité [1],

$$\eta_{ij}\omega_c = \eta_{ji}\omega_c \quad (3)$$

Cette relation est aussi appelée relation de cohérence [16].

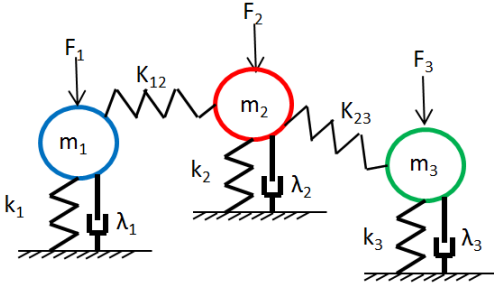


FIGURE 1 – Trois oscillateurs excités par des forces aléatoires décorréliées  $F_i$ , couplés par des couplages élastiques  $K_{ij}$ .

Dans le cas de trois oscillateurs (Figure 1) le système SEA est

$$\begin{bmatrix} P_{inj}^1 \\ P_{inj}^2 \\ P_{inj}^3 \end{bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} \\ 0 & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

où les  $\eta_i = \lambda_i/m_i\omega_i$  sont les facteurs de perte par amortissement (DLF pour damping loss factor). La matrice est appelée matrice des facteurs de perte par couplage (CLF). Un tel système correspond à une SEA dite ”traditionnelle” (ou ”proper-SEA” d’après Mace [17]) : les conditions de conservation d’énergie et de cohérence sont vérifiées et les facteurs de perte par couplage indirect (CLFi)  $\eta_{13}$  et  $\eta_{31}$  sont égaux à zéro.

### 3 Calcul de référence

Cette section présente les expressions exactes des énergies vibratoires, de la puissance injectée et de la puissance échangée entre deux oscillateurs. Elles sont utiles pour vérifier la validité de la CPP.

Dans l’espace de Fourier, les équations du mouvement de trois oscillateurs couplés par des couplages élastiques peuvent s’écrire sous la forme matricielle  $\mathbf{DX}=\mathbf{F}$  où  $\mathbf{X}$  est le vecteur déplacement,  $\mathbf{F}$  le vecteur excitation et  $\mathbf{D}$  la matrice de rigidité dynamique. Pour les oscillateurs mécaniques de la Figure 1,  $\mathbf{D}$  est

$$D = \begin{bmatrix} m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_1) & -K_{12}m_2/m_1 & 0 \\ -K_{12}m_1/m_2 & m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_2) & -K_{23}m_3/m_2 \\ 0 & -K_{23}m_2/m_3 & m_3(\omega_3^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

#### 3.1 Énergies vibratoires des oscillateurs

La fonction de réponse en fréquence  $H_i^j$  qui donne la réponse de l’oscillateur  $i$  quand une force harmonique  $e^{j\omega t}$

est appliquée à l’oscillateur  $j$  est obtenue avec la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1}$ . Pour tout vecteur de forces harmoniques  $\mathbf{F}$ , le vecteur déplacement est  $\mathbf{X}=\mathbf{HF}$ . Lorsque les forces sont aléatoires, stationnaires et décorréliées, l’espérance de la vitesse quadratique de l’oscillateur  $i$  s’écrit,

$$\langle \dot{X}_i^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \sum_j |H_i^j|^2 S_j d\omega \quad (6)$$

où  $\langle . \rangle$  est une espérance de probabilité et  $F_i$  des processus stochastiques dont la densité spectrale de puissance est notée  $S_i$ . Notons que l’intégrale porte sur une bande de fréquence infinie. On considère désormais que les forces excitatrices ont une densité spectrale de puissance constante ( $S_i = 1$ ) à l’intérieur de la bande de fréquence  $[\omega_{min}, \omega_{max}]$  et sont nulles à l’extérieur ( $S_i = 0$ ). Ainsi, dans la suite, les intégrales sont limitées à cette bande de fréquence.

Soit  $E_i^j$  l’énergie vibratoire de l’oscillateur  $i$  lorsque l’excitation est appliquée sur l’oscillateur  $j$ . Elle est définie comme étant deux fois l’espérance de l’énergie cinétique,

$$\langle E_i^j \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} m_i \omega^2 \left( \sum_j |H_i^j|^2 S_j \right) d\omega \quad (7)$$

Cette expression est valable pour n’importe quelle densité spectrale de puissance sous réserve que les forces soient aléatoires, stationnaires et décorréliées.

#### 3.2 Puissance transmise et puissance injectée

La puissance transmise de l’oscillateur  $i$  vers l’oscillateur  $j$  lorsque la force est appliquée sur l’oscillateur  $k$  est

$$\langle P_{ij} \rangle = \frac{1}{2} K_{ij} \langle X_i \dot{X}_j \rangle - \langle X_j \dot{X}_i \rangle \quad (8)$$

soit aussi

$$\langle P_{ij} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \Re [i K_{ij} \omega \left( \sum_k H_i^{k*} H_j^k S_k \right)] d\omega \quad (9)$$

où  $*$  désigne un complexe conjugué et  $\Re$  la partie réelle. Dans le cas présent (cf Figure 1), les oscillateurs 1 et 3 ne sont pas directement connectés,  $\langle P_{13} \rangle = 0$ .

La puissance injectée dans l’oscillateur  $i$  est,

$$\langle P_{inj}^i \rangle = \langle F_i \dot{X}_i \rangle = \frac{1}{\pi} \Re \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} i \omega H_i^i S_i d\omega \quad (10)$$

### 4 Méthode des puissances injectées

La méthode des puissances injectées (PIM) [18] consiste à exciter un à un les oscillateurs par des forces décorréliées et à calculer pour chaque cas l’énergie vibratoire et la puissance injectée de chacun (Eq. (7) et (10)).

En superposant chaque équation pour chaque cas d’excitation on peut construire un système matriciel du type  $\mathbf{P} = \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\omega}_c$  où  $\mathbf{P}$  est le vecteur de puissance injectée,  $\mathbf{E}$  la matrice composée des énergies vibratoires  $E_i^j$  et  $\boldsymbol{\eta}$  le vecteur qui contient les DLF, CLF et CLFi. Dans le cas de trois oscillateurs, le système matriciel  $\mathbf{P} = \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\omega}_c$  s’écrit,

$$\begin{bmatrix} \frac{P_{inj}^1}{\omega_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_{inj}^2}{\omega_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_{inj}^3}{\omega_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^1 & E_1^1 & E_1^1 & -E_2^1 & 0 & 0 & -E_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1^1 & 0 & E_1^1 & E_2^1 & E_2^1 & 0 & -E_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & -E_1^1 & 0 & 0 & -E_2^1 & E_3^1 & E_3^1 & E_3^1 \\ E_1^2 & E_1^2 & E_2^2 & -E_2^2 & 0 & 0 & -E_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2^1 & 0 & E_2^1 & E_2^2 & E_2^2 & 0 & -E_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_2^1 & 0 & 0 & -E_2^2 & E_3^2 & E_3^2 & E_3^2 \\ E_1^3 & E_1^3 & E_2^3 & -E_3^3 & 0 & 0 & -E_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & -E_3^1 & 0 & E_3^1 & E_3^2 & E_3^2 & 0 & -E_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_3^1 & 0 & 0 & -E_3^2 & E_3^3 & E_3^3 & E_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{21} \\ \eta_2 \\ \eta_{23} \\ \eta_{31} \\ \eta_{32} \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le vecteur  $\eta$  se déduit par une simple inversion.

La méthode des puissances injectées permet ainsi d'obtenir à partir du calcul de référence une matrice de facteurs de perte par couplage comparable à celle de la SEA traditionnelle mais sans contraindre les éléments diagonaux (CLFi à zéro). Dans la suite, on étudie les conditions d'apparition de ces facteurs de perte.

## 5 Résultats et commentaires

### 5.1 Influence de la force de couplage

On considère trois oscillateurs dont les caractéristiques sont données par le tableau 1. Le paramètre variable est la force de couplage élastique  $K_{ij}$ . Elle est définie entre 0 et  $K_{max}$  le maximum de couplage, choisi de manière à ce qu'à partir de cette valeur, les réponses des oscillateurs ne varient pas. Dans le cas présent  $K_{max}$  est égale à  $10^6 N/m$ .

Type	Osc. 1	Osc. 2	Osc. 3
Masse $m_i$ (kg)	0.0039	0.0040	0.0036
Raideur $k_i$ (N/m)	9e3	9e3	9e3

TABLEAU 1 – Paramètres des oscillateurs

Les valeurs de couplage entre les différents oscillateurs sont nommées  $K_{12}$  et  $K_{23}$  et varient simultanément de  $10^{-7}\%$  à 100% de  $K_{max}$ . Tous les modes sont supposés résonants (les fréquences propres sont contenues dans l'intervalle  $[f_{min}, f_{max}]$ ). Par ailleurs, les excitations ont une densité spectrale de puissance constante dans la bande de fréquence considérée. Le calcul des énergies vibratoires se fait d'après l'Eq. (7) avec  $S_1 = 1$  et  $S_2 = S_3 = 0$ . Les paramètres du tableau 1 donnent les fréquences propres suivantes (lorsque  $K_{ij} \ll k_i$ ) :  $f_1 = 241.77$  Hz ;  $f_2 = 238.75$  Hz et  $f_3 = 251.64$  Hz.

Les fréquences propres  $f_i = \sqrt{(k_i + K_{ij})/m_i}/2\pi$  augmentent avec le couplage et notamment lorsque  $K_{ij}$  n'est plus négligeable devant  $k_i$ . La bande de fréquence est prise suffisamment large ( $f_{min} = 0$  Hz et  $f_{max} = 20$  kHz) pour que les modes soient tous résonants quelque soit la force de couplage.

### 5.2 Cas de deux oscillateurs couplés

Dans cette section on considère le cas de deux oscillateurs ( $K_{23} = 0$ ). L'excitation porte uniquement sur l'oscillateur 1 ( $S_2 = 0$ ).

L'expression de la constante de proportionnalité  $\eta_{12}\omega_c$  est donnée par l'Eq. (2) et est notée  $\beta_{SEA}$ . Le ratio de la puissance transmise et de la différence des énergies

vibratoires est calculé d'après les Eq. (7) et (9) et est noté  $\beta_{REF} = P_{12}/(E_1 - E_2)$ . Les taux d'amortissement sont fixés à  $\eta_1 = \eta_2 = 0.3\%$ .

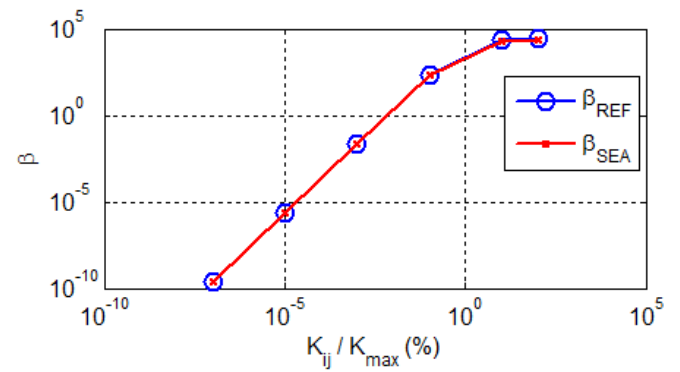


FIGURE 2 – Deux oscillateurs : Évolution de  $\beta_{REF}$  et  $\beta_{SEA}$  en fonction du taux de couplage  $K_{12}/K_{max}$ .  $\eta_1 = \eta_2 = 0.3\%$ .

La Figure 2 montre l'évolution de  $\beta_{SEA}$  et  $\beta_{REF}$  en fonction du taux de couplage  $K_{12}/K_{max}$ . Les deux courbes se superposent pour chaque valeur de couplage. La CPP est ainsi toujours vérifiée pour deux oscillateurs quelle que soit la force de couplage.

### 5.3 Cas de trois oscillateurs

La Figure 3 présente l'évolution des facteurs  $\beta$  pour le cas de trois oscillateurs en fonction du taux de couplage. Les  $\beta_{ij,REF}$  sont à nouveau calculés avec les Eq. (7) et (9) et sont comparés avec les facteurs  $\beta_{ij,SEA}$  (Eq. (2)). Les indices  $i$  et  $j$  précisent les oscillateurs concernés. L'excitation est maintenue sur l'oscillateur 1 uniquement ( $S_2 = S_3 = 0$ ). La bande de fréquence reste large ( $f_{min} = 0$  Hz,  $f_{max} = 20$  kHz) pour contenir tous les modes résonants.

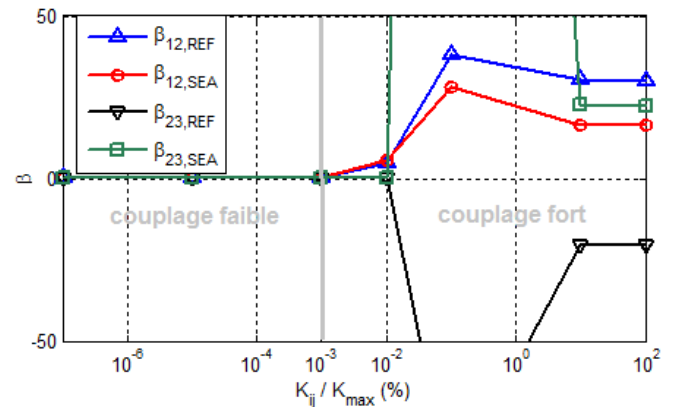


FIGURE 3 – Cas de trois oscillateurs couplés : Évolution de  $\beta_{ij,REF}$  et  $\beta_{ij,SEA}$  en fonction des taux de couplage  $K_{12}/K_{max} = K_{23}/K_{max}$  ;  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.3\%$ .

Contrairement aux résultats trouvés avec deux oscillateurs (Figure 2), la Figure 3 met en évidence deux comportements différents (cf. ligne de séparation grise) :

- pour des couplages faibles ( $K_{ij} \ll k_i$ ), les  $\beta_{ij,REF}$  sont égaux aux  $\beta_{ij,SEA}$  en particulier jusqu'à des valeurs de couplage de l'ordre de  $10^{-3}\%$  de  $K_{max}$ .
- pour des valeurs de couplage plus importantes ( $\geq 10^{-3}\%$  de  $K_{max}$ ) on observe que les valeurs des

$\beta_{ij,REF}$  et des  $\beta_{ij,SEA}$  diffèrent traduisant ainsi que la CPP n'est plus valide.

Ces résultats sont en accord avec les observations de Woodhouse [19].

A présent on utilise la méthode des puissances injectées (Figure 4) : les facteurs de perte par amortissement (DLF) et par couplage (CLF) ont été estimés sur la base du calcul de référence (Eq. (7) et (10)) tout en faisant varier les couplages  $K_{ij}$ . Les oscillateurs sont excités un à un avec une densité spectrale de puissance  $S_i = 1$ . La bande de fréquence reste large ( $f_{min} = 0 \text{ Hz}; f_{max} = 20 \text{ kHz}$ ). Le tableau 2 précise les valeurs de chaque terme du vecteur  $\eta$  (cf. section 4) pour différentes valeurs de taux de couplage.

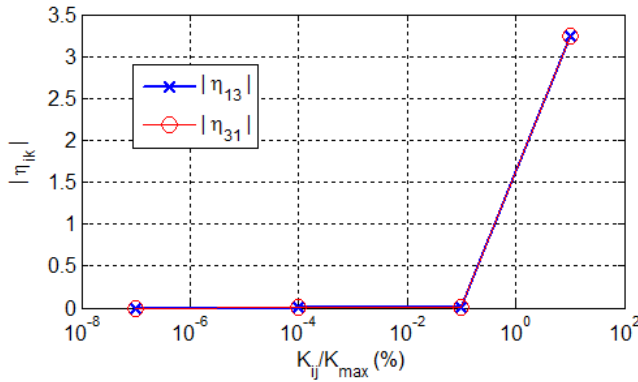


FIGURE 4 – Mise en évidence de l'apparition des CLFi en fonction du taux de couplage  $K_{ij}/K_{max}$  ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.3\%$ ).

$K_{ij}/K_{max}(\%)$	1E-7	1E-4	0.1	10
$\eta_1$	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
$\eta_{12}$	1.11e-13	1.12e-07	0.0058	-0.09
$\eta_{13}$	-6.69e-26	-6.78e-14	0.014	3.25
$\eta_{21}$	1.11e-13	1.12e-07	0.0059	-0.09
$\eta_2$	0.0031	0.0031	0.0032	0.0032
$\eta_{23}$	7.14e-15	7.15e-09	0.0067	0.098
$\eta_{31}$	-6.69e-26	-6.78e-14	0.014	3.25
$\eta_{32}$	7.14e-15	7.15e-09	0.0067	0.099
$\eta_3$	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035

TABLEAU 2 – Facteurs de perte par amortissement et par couplage (direct et indirect) estimés par la méthode des puissances injectées.

Tout d'abord on observe que la relation de réciprocité est vérifiée quelles que soient les valeurs de couplage. En effet,  $\eta_{12} = \eta_{21}; \eta_{23} = \eta_{32}; \eta_{13} = \eta_{31}$ . Par ailleurs on constate que les valeurs estimées des DLF sont en accord avec les valeurs prescrites (de l'ordre de 0.3%).

Pour des valeurs de couplage faible les CLFi sont faibles comparés aux CLF ( $\eta_{ik} \ll \eta_{ij} \ll \eta_i$ ) si bien qu'ils peuvent être négligés. Dans ce cas la matrice des CLF est similaire à une matrice de CLF utilisée avec la SEA traditionnelle. À l'inverse, pour des valeurs de couplage fort (au dessus 0.01% de  $K_{max}$ ), les CLFi sont dominants. Ils ne peuvent plus être négligés. Le cas présent est un cas où la SEA traditionnelle ne peut fonctionner.

## 5.4 Influence d'un mode non-résonant

Dans cette section on étudie l'influence d'un mode qui est en dehors de la bande de fréquence d'excitation. Le paramètre variable est la fréquence de résonance de l'oscillateur 2. Elle est ajustée de manière à ce qu'elle soit au départ en dehors de la bande de fréquence d'intégration. L'écartement de la fréquence de résonance de l'oscillateur 2 avec la bande de fréquence est calculé par la différence  $f_2 - f_{min}$ . Trois cas d'étude sont possibles :

- Le cas non-résonant basses fréquences  $f_2 \leq f_{min}$
- Le cas résonant  $f_2 \in [f_{min}; f_{max}]$  (zone grisée des Fig. 5 et 6)
- Le cas non-résonant hautes fréquences  $f_2 \geq f_{max}$ .

La Figure 5 illustre par un dessin le principe de la simulation.

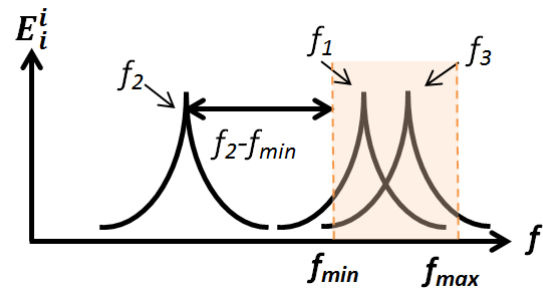


FIGURE 5 – Représentation des fréquences de résonance de chaque oscillateur. La fréquence de résonance de l'oscillateur 2 varie.

La Figure 6 présente les résultats des facteurs de perte par amortissement et par couplage pour les différents cas d'étude. La bande de fréquence d'excitation est une octave définie par la fréquence centrale  $f_c = 250 \text{ Hz}$ . Les facteurs de perte par amortissement sont paramétrés pour les trois oscillateurs (voir Tableau 3). Le pic de résonance de l'oscillateur 2 est à l'intérieur de la bande de fréquence pour des valeurs de  $f_2 - f_{min}$  comprises entre 0 et 177 Hz (zone grisée de la Fig. 6).

Type	Osc. 1	Osc. 2	Osc. 3
Masse $m_i$ (kg)	0.0039	variable	0.0036
Raideur $k_i$ (N/m)	9e3	9e3	9e3

TABLEAU 3 – Caractéristiques des oscillateurs

Dans un premier temps on observe que les DLF des oscillateurs 1 et 3 ( $\eta_1$  et  $\eta_3$ ) sont correctement estimés.  $\eta_2$  évolue avec la fréquence de résonance  $f_2$ , les valeurs estimées et paramétrées sont en accord dès que le pic de résonance est effectivement dans la bande de fréquence. Pour les deux situations où le pic est en dehors de la bande de fréquence, le facteur de perte par amortissement est soit sous-estimé soit surestimé.

Dans un deuxième temps on constate que la relation de cohérence n'est validée pour les facteurs de perte par couplage direct (CLF) que lorsque le pic de résonance est contenu dans la bande de fréquence d'excitation. En effet



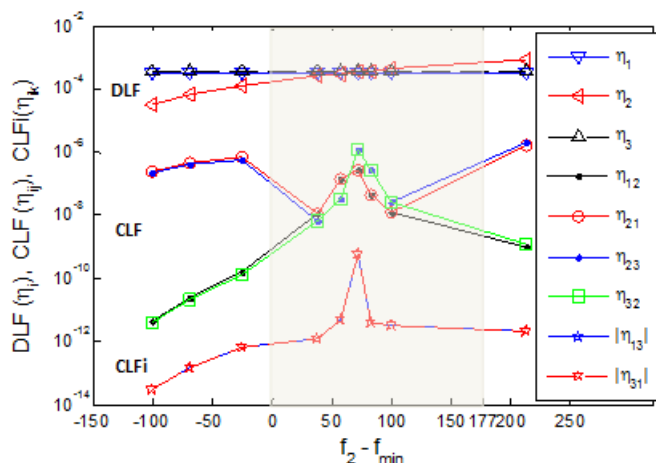


FIGURE 6 – Évolution des facteurs de perte par amortissement (DLF :  $\eta_i$ ), par couplage direct (CLF :  $\eta_{ij}$ ), par couplage indirect (CLFi :  $\eta_{ik}$ ) avec la méthode des puissances injectées. Bande de fréquence d'excitation : [176 Hz; 353 Hz], couplage faible ( $K_{12} = K_{23} = 10^{-5} \%$ ), faible amortissement (0.03 %)

pour les cas non-résonants basses fréquences et hautes fréquences la relation de réciprocité est invalide ( $\eta_{21} = \eta_{23}$  et  $\eta_{12} = \eta_{32}$ ). À l'inverse elle est valide pour le cas résonant ( $\eta_{12} = \eta_{21}$  et  $\eta_{23} = \eta_{32}$ ).

Dans un troisième temps on trace les facteurs de perte par couplage indirects (CLFi). Ils peuvent prendre des valeurs négatives, aussi pour pouvoir les comparer aux DLF et aux CLF on prend leur valeur absolue. On observe que pour les différentes valeurs de  $f_2 - f_{min}$  les CLFi restent  $10^2$  inférieurs aux CLF ( $\eta_{ij} \gg \eta_{ik}$ ) et  $10^6$  inférieurs aux DLF ( $\eta_i \gg \eta_{ik}$ ). Ainsi dans les trois situations, il n'y a pas d'apparition significative des CLFi.

## 6 Conclusion

Il a été montré que la relation fondamentale de la SEA, la "coupling power proportionality" est valide pour toutes les forces de couplage, sous réserve que le système ne soit limité qu'à deux sous-systèmes et que la bande de fréquence d'excitation contienne toutes les fréquences de résonance (tous les modes résonants). Pour plus de deux sous-systèmes, la CPP est vérifiée tant que les couplages restent faibles ( $K_{ij} \ll k_i$  est une condition favorable) et tous les modes résonants. Néanmoins, la valeur classique de la CPP ( $\beta$  selon l'Eq. (1)) n'est plus vérifiée pour des couplages forts. La raison est l'apparition de facteurs de perte par couplage indirect. La relation de réciprocité reste néanmoins valide pour toutes les forces de couplage.

Dans le cas spécifique de trois oscillateurs, et pour une situation de couplage faible, on ne constate pas de dominance des facteurs de perte par couplage indirect (CLFi). Un mode non-résonant (mode en dehors de la bande de fréquence d'excitation) conduit à une invalidité de la relation de cohérence ( $\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$ ). Il serait judicieux d'étudier le cas de structures à plus forte densité modale pour pouvoir retrouver certains résultats de la littérature (notamment l'apparition de facteur de perte par couplage indirect).

Finalement, dans le cas d'oscillateurs mécaniques, le non-respect des hypothèses de la SEA provoque un défaut

dans la matrice des facteurs de perte par couplage : la SEA classique ne peut plus être appliquée. En faisant l'étude inverse (méthode des puissances injectées) on observe que le système SEA traditionnel n'est plus rigoureusement respecté ("proper-SEA") mais devient un système qui tente de s'en approcher ("SEA-like").

## Remerciements

Ce travail est financé par le Labex CeLyA de l'université de Lyon, soutenu par le CNRS (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

## Références

- [1] R. H. Lyon. *Theory and application of Statistical Energy Analysis*. Butterworths-Heimann, Boston, MA, 1995.
- [2] "MID-FREQUENCY", *CAE methodologies for Mid-frequency analysis in vibration and acoustics*. Katholieke Universiteit Leuven - Faculty of engineering, 2012.
- [3] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow and energy sharing in random vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(5) :623–639, 1962.
- [4] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Review of statistical energy analysis hypotheses in vibroacoustics. *Proc. R. Soc. A*, 470(2162) :1471–2946, 2014.
- [5] F. J. Fahy and Y. De-Yuan. Power flow between non-conservatively coupled oscillators. *J. Sound Vib.*, 114(1) :1–11, 1985.
- [6] Y. Kishimoto and D. S. Bernstein. Thermodynamic modelling of interconnected systems, part i : conservative coupling. *J. Sound Vib.*, 182(1) :23–58, 1994.
- [7] C. R. Fredo. A note on conservative and non-conservative coupling. In *IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis*, pages 95–106. Solid Mechanics and Its Applications, Kluwer academic publishers, London, 1999.
- [8] D. E. Newland. Power flow between a class of coupled oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(3) :553–559, 1966.
- [9] S. Finnveden. A quantitative criterion validating coupling power proportionality in statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 330 :87–109, 2011.
- [10] M. J. Crocker and A. J. Price. Sound transmission using statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 9 :469–486, 1969.
- [11] L. Maxit, K. Ege, N. Totaro, and J-L. Guyader. Non-resonant transmission modelling with statistical modal energy distribution analysis. *J. Sound Vib.*, 333 :499–519, 2014.
- [12] K. Renji, P.S. Nair, and S. Narayanan. Non-resonant response using statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 241 :253–270, 2001.

- [13] C-Y. Cheng, R-J. Shyu, and D-Y. Liou. Statistical energy analysis of non-resonant response of isotropic and orthotropic plates. *J. Mech Sc. Tech.*, 21 :2082–2090, 2007.
- [14] T.D. Scharton and R.H. Lyon. Power flow and energy sharing in random vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(6) :1332–1343, 1968.
- [15] R. Lotz and S.H Crandall. Prediction and measurement of the proportionality constant in statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54 :516–524, 1973.
- [16] B. Mace. Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *J. Sound Vib.*, 264 :391–409, 2003.
- [17] B. R. Mace. Statistical energy analysis : coupling loss factors, indirect couplings and system modes. *J. Sound Vib.*, 279 :141–170, 2005.
- [18] D. A. Bies and S. Hamid. In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *J. Sound Vib.*, 90 :187–204, 1980.
- [19] J. Woodhouse. An approach to the theoretical background of statistical energy analysis applied to structural vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69 :1695–1709, 1981.