



Modèle acoustique pour fine couche de fluide thermo-visqueux à l'arrière d'une source étendue

P. Honzík^{a,b} et M. Bruneau^a

^aLaboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72085
Le Mans, France

^bCzech Technical University in Prague, Faculty of Transportation, Konviktská 20, 110 00 Praha 1,
République tchèque
petr.honzik@gmail.com

Le système étudié comporte une membrane, une plaque ou une poutre plate susceptible d'être animée d'un mouvement de flexion sous l'effet d'une onde acoustique ou vibratoire extérieure. Elle est chargée sur sa face arrière par une fine couche de fluide, elle-même limitée sur son autre frontière par une plaque plane ou non, fixe ou non, et à sa périphérie par une frontière d'impédance finie ou infinie. Les systèmes qui répondent en pratique à une telle description vont des transducteurs miniatures (MEMS 1D ou 2D) aux systèmes d'amortissement passifs de panneaux vibrants, les modèles en usage dépendant des systèmes considérés et des objectifs visés. Certaines applications, notamment celles relevant de la métrologie fine en fluides divers et dans des conditions de pression et de températures variées, nécessitent l'usage de modèles précis et robustes, modèles de nature à évaluer en particulier l'influence des transducteurs sur les champs acoustiques extérieurs étudiés. C'est ainsi qu'un formalisme intégral est proposé ici, qui peut pour cela se substituer aux méthodes modales en usage pour décrire le comportement de la fine couche de fluide et son couplage avec les frontières qui le délimite.

1 Introduction

Pour les problèmes analytiques posés par les systèmes décrits au-début du résumé, les formes de solutions largement proposées dans la littérature [1-6] reposent sur des descriptions modales, aussi bien pour les parois vibrantes que pour les domaines fluides (fines couches, cavités arrière ou périphérique), associées aux solutions générales des équations de propagation homogènes du problème. Les modes propres régulièrement utilisés satisfont soit à des conditions de Dirichlet (sur la périphérie d'une membrane par exemple), soit à des conditions de Neumann ou des conditions d'interfaces (à la périphérie des éléments fluides), et par-delà satisfont les autres conditions en frontières (conditions de non-glissement et isotherme en paroi). Les développements modaux étant toujours considérablement tronqués malgré des couplages de mode à conditions aux frontières non compatibles, modes de Dirichlet (membrane à bord fixe) et de Neumann (frontière rigide à la périphérie du fluide), cette méthode classique recèle des difficultés qui restreignent son usage aux situations courantes, d'où le formalisme intégral présenté ici.

Ce formalisme, proposé pour décrire le comportement de la couche de fluide (jusqu'à 100 kHz), permet d'accéder à une précision équivalente à celle obtenue par une théorie modale, en évitant les difficultés (dont celles mentionnées précédemment). Ce formalisme est appliqué au cas de systèmes à géométrie cartésienne (MEMS) pour en vérifier les possibilités. A cette fin, les résultats du calcul sont comparés à ceux obtenus à partir d'une théorie modale et à ceux obtenus par un calcul numérique (FEM) adapté à la simulation des phénomènes dans les couches limites thermo-visqueuses.

2 Solution analytique

La structure considérée ici est constituée d'une fine couche de fluide qui sépare une paroi vibrante (membrane, plaque ou poutre plane en $z = 0$) et une paroi arrière rigide (plane ou non, continue ou discontinue), limitée en périphérie par un élément décrit par son impédance acoustique, les dimensions externes de la membrane, de la paroi arrière et de la couche de fluide étant les mêmes (figure 1). L'axe z est perpendiculaire à ces éléments, orienté comme indiqué sur la figure, et la géométrie dans le plan perpendiculaire à cet axe est soit rectangulaire soit circulaire. Pour évaluer les résultats obtenus, une configuration disponible dans la littérature est traitée ici : une structure rectangulaire (3-D) avec une membrane d'arête L en $z = 0$, une cavité périphérique et une paroi arrière rigide en $z = -e$ (e étant l'épaisseur de la couche

de fluide), la membrane, la paroi arrière et la fine couche de fluide ayant les mêmes dimensions externes.

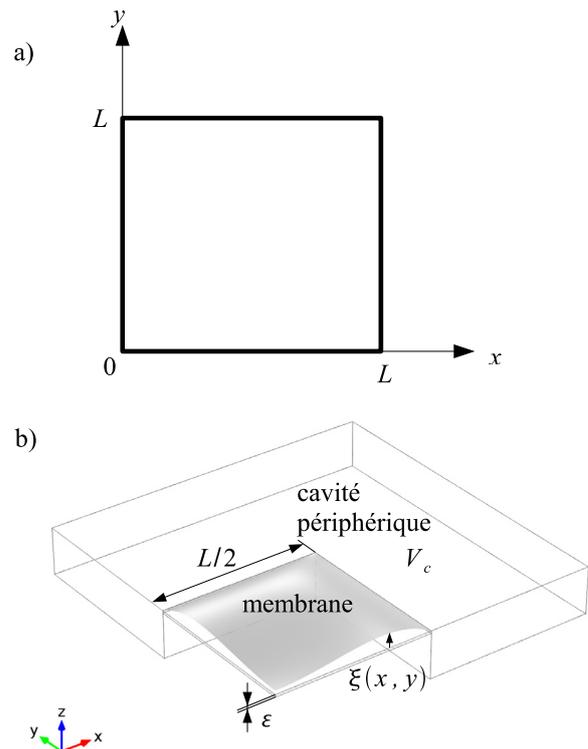


Figure 1 : Structure considérée - a) dimensions de la membrane carrée, b) géométrie du système (premier quadrant).

2.1 Equations de base

Le champ de déplacement $\xi(x, y)$ de la membrane (fixée à sa périphérie sur un cadre rigide, condition de Dirichlet), positif suivant l'axe z , créé par une source de pression acoustique p_{av} (supposée uniforme sur la membrane) et chargé par le champ de pression $p(x, y)$ dans le film de fluide et la cavité entre la membrane et la paroi arrière, satisfait le système d'équations suivantes :

$$T(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + K^2)\xi(x, y) = p_{av} - p(x, y),$$

$$\xi(0, y) = \xi(L, y) = \xi(y, 0) = \xi(y, L) = 0, \quad (1.a, b)$$

où $K = \omega\sqrt{M_S/T}$, T and M_S désignant respectivement la tension de la membrane et sa masse par unité de surface, et où ω désigne la pulsation.

Le champ de déplacement de la membrane (équations 1.a and 1.b) peut être exprimé sous la forme d'un développement sur les fonctions propres de Dirichlet ($\langle f_1 | f_2 \rangle$ représente le produit scalaire $\int_0^b f_1 f_2 r dr$) :

$$\xi = \sum_m \sum_n \xi_{mn} \psi_{mn}(k_{x_m} x, k_{y_n} y)$$

$$\text{avec } \xi_{mn} = \langle p - p_{av} | \psi_{mn} \rangle / \left[T(k_{mn}^2 - K^2) \right], \quad (2.a,b)$$

où les fonctions propres $\psi_{mn}(x, y)$ et les valeurs propres associées $k_{mn} = \sqrt{k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2}$ sont des fonctions trigonométriques bien connues (ou des fonctions de Bessel en géométrie circulaire) [2, 3, 7].

Considérant que la membrane se comporte comme une source étendue décrite par la composante z de son débit volumique $U(x, y)$, le champ de pression dans chaque élément de fluide satisfait le système d'équations suivant :

$$\left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \chi^2 \right) p(x, y) = -U(x, y), \quad (3.a)$$

$$\text{où } U(x, y) = \rho_0 \omega^2 \xi(x, y) / (\varepsilon F_v) \quad (3.b)$$

(U s'annulant en dehors de la membrane), et où le nombre d'onde complexe χ prend en compte la pulsation ω et diverses propriétés du fluide, à savoir la compressibilité et la masse volumique (ρ_0) par le biais de la célérité adiabatique c_0 , la capacité calorifique à pression constante par unité de masse C_p , le paramètre γ du gaz, le coefficient de viscosité de cisaillement μ , et le coefficient de conduction thermique λ_h (voir par exemple [2, 3, 5, 6, 7]):

$$\chi^2 = \left(\omega^2 / c_0^2 \right) \left[1 + (\gamma - 1)(1 - F_h) \right] / F_v, \quad (4.a)$$

$$\text{avec } F_v = 1 - \tan(k_v \varepsilon / 2) / (k_v \varepsilon / 2)$$

$$\text{et } F_h = 1 - \tan(k_h \varepsilon / 2) / (k_h \varepsilon / 2), \quad (4.b,c)$$

$$k_v = \left[(1 - i) / \sqrt{2} \right] \sqrt{\rho_0 \omega / \mu} \quad \text{et}$$

$k_h = \left[(1 - i) / \sqrt{2} \right] \sqrt{\rho_0 \omega C_p / \lambda_h}$ étant les nombres d'onde associés respectivement au mouvement de cisaillement du aux effets de viscosité et au mouvement dit entropique associé aux effets de conductions thermiques (avec la convention temporelle $e^{i\omega t}$).

La pression dans la cavité périphérique $p_c = Z_c 4w_i$, Z_c désignant l'impédance d'entrée de la cavité et w_i le

débit sur i -ème bord de l'électrode (carrée), est supposée être uniforme :

$$p_c = p(x, 0) = p(x, L) = p(0, y) = p(L, y). \quad (5)$$

Par suite, la relation usuelle entre la vitesse et la dérivée de la pression dans la lame de fluide donne l'expression de la dérivée normale de la pression au bord d'électrode

$$\partial_n p = -\frac{j\omega\rho_0}{4F_v Z_c \varepsilon L} p_c. \quad (6)$$

2.2 Formulation intégrale (champ de pression)

La fonction de Green choisie, associée à l'équation de propagation (3.a), et sa dérivée normale sont exprimées de la manière suivante :

$$G(x, x_0; y, y_0) = -(i/4) H_0^- (\chi |\vec{r} - \vec{r}_0|), \quad (7.a)$$

$$\partial_{x_0} G(x, x_0; y, y_0) = (i/4) H_1^- (\chi |\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{x - x_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (7.b)$$

$$\partial_{y_0} G(x, x_0; y, y_0) = (i/4) H_1^- (\chi |\vec{r} - \vec{r}_0|) \frac{y - y_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (7.c)$$

avec $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, où $H_n^- (\chi |\vec{r} - \vec{r}_0|)$ représente la fonction de Hankel de première espèce d'ordre " n ".

La formulation intégrale du problème (3.a,b) dans chaque domaine défini au-dessus, compte tenu des équations (5) et (6), peut être écrit comme suit [7, 8]:

$$p(x, y) = \iint_{S_M} G(x, x_0; y, y_0) U(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + I(x, y) p_c, \quad (8)$$

avec

$$I(x, y) = I_{G1}(x, y, 0) - I_{G1}(x, y, L) + I_{G2}(x, 0, y) - I_{G2}(x, L, y), \quad (9)$$

où

$$I_{G1}(x, y, y_0) = \int_0^L \left[\frac{j\omega\rho_0}{4F_v Z_c \varepsilon L} G(x, x_0; y, 0) + \partial_{y_0} G(x, x_0; y, y_0) \right] dx_0, \quad (10)$$

$$I_{G2}(x, x_0, y) = \int_0^L \left[\frac{j\omega\rho_0}{4F_v Z_c \varepsilon L} G(x, x_0; y, 0) + \partial_{x_0} G(x, x_0; y, y_0) \right] dy_0.$$

La valeur moyenne ($\langle \cdot \rangle_x$) de la pression sur chaque bord de l'électrode ($y=0$ par exemple) prend alors la forme suivante :

$$p_c = \frac{\iint_{S_M} \langle G(x, x_0; 0, y_0) \rangle_x U(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{1 - \langle I(x, 0) \rangle_x}. \quad (11)$$

Le report de cette expression dans l'équation (8) donne la solution recherchée.

2.3 Le déplacement de la membrane

Le report des équations (8), (9), (10) et (11) dans l'équation (2b) donne l'expression suivante pour les coefficients modaux du champ de déplacement de la membrane :

$$T(k_{mn}^2 - K^2) \xi_{mn} = c_{mn} + \sum_q \sum_r \xi_{qr} A_{(mn), (qr)}, \quad (12)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\{[A] + [B]\}(\Xi) = (C), \quad (13)$$

où (Ξ) et (C) sont des vecteurs colonnes d'éléments ξ_{mn} et $c_{mn} = \langle p_{av} | \psi_{mn} \rangle$ respectivement, $[B]$ est une matrice diagonale avec d'éléments $T(k_{mn}^2 - K^2)$, et $[A]$ est une matrice d'éléments $A_{(mn), (qr)}$ donnés par

$$A_{(mn), (qr)} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \iint_{S_M} \psi_{mn}(x, y) \left\{ \iint_{S_M} \psi_{qr}(x, y) [G(x, x_0; y, y_0) + \langle G(x, x_0; 0, y_0) \rangle_x \frac{I(x, y)}{1 - \langle I(x, 0) \rangle_x}] dx_0 dy_0 \right\} dx dy. \quad (14)$$

3 Solution numérique

En combinant les équations linéaires homogènes qui gouvernent le mouvement du fluide (l'équation de Navier-Stokes, l'équation de conservation de la masse et l'équation de Fourier pour la conduction de la chaleur), le système d'équations couplées pour la vitesse particulière \mathbf{v} et l'écart de température τ en régime harmonique prend la forme suivante [9] :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \mathbf{v} - \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + j\omega c_0 \ell_v \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ & j\omega c_0 \ell'_v \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + j\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \mathbf{grad} \tau = \mathbf{0}, \quad (15) \\ & j\omega \tau - \gamma \ell_h c_0 \operatorname{div} \mathbf{grad} \tau + \\ & + \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{aligned}$$

où $\ell_v = (3\mu/4 + \eta)/\rho_0 c_0$, $\ell'_v = \mu/\rho_0 c_0$, $\ell_h = \lambda/\rho_0 c_0 C_p$ sont respectivement les longueurs caractéristiques de diffusion visqueuse et de diffusion thermique, $\hat{\beta} = (\partial P/\partial T)_p$ est le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à masse volumique constante, C_p est la chaleur massiques par unité de masse à pression constante et η est le coefficient de viscosité de volume. Les calculs numériques 3D, avec maillage adaptatif, effectués ici reposent sur cette formulation [10].

La pression acoustique

$$p = \hat{\beta} \tau - \frac{\rho_0 c_0^2}{j\omega \gamma} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (16)$$

et la condition aux limites pour la composante z de la vitesse particulière sur la membrane $v_z = j\omega \xi$, complétée par la condition de non-glissement $v_x = v_y = 0$ et la condition isotherme $\tau = 0$ (parois rigides isothermes) permettent d'assurer le couplage entre le système (15) et l'équation pour déplacement de la membrane (1).

4 Résultats théoriques, discussion

La méthode analytique proposée ci-dessus peut être utilisée avec intérêt pour diverses configurations et situations (celles mentionnées dans le résumé). A titre d'exemple et à fin de validation, elle est appliquée ici à la configuration schématisée sur la figure 1 au-dessus, de façon à comparer les résultats qu'elle produit à ceux disponibles dans la littérature. Plus précisément, cette configuration est celle d'un transducteur MEMS, à membrane carrée et paroi arrière rigide séparées par une fine couche de fluide d'épaisseur $\varepsilon = 7,5 \mu\text{m}$, limité en périphérie par une cavité de volume $V_c = 5.10^{-10} \text{m}^3$ représentée par son impédance acoustique d'entrée, les dimensions externes de la membrane, de la paroi arrière et de la couche de fluide étant $L = 1 \text{mm}$. Pour cette géométrie les fonctions propres ψ_{mn} (éq. 2) sont données par

$$\psi_{mn}(k_{x_m} x, k_{y_n} y) = \frac{2}{L} \sin k_{x_m} x \sin k_{y_n} y, \quad (17)$$

où $k_{x_m} = m\pi/L$, $k_{y_n} = n\pi/L$, les quatre premiers modes ($m, n = 1, 3$) étant les seuls pris en compte dans la suite. Les résultats de la méthode analytique (présentée au paragraphe 2 ci-dessus) sont comparés aux résultats numériques (paragraphe 3) et à ceux obtenus à partir d'une

théorie modale de la littérature [2]. Les paramètres du fluide utilisés pour les calculs analytiques et numériques sont donnés dans le Tableau 1 et la pression avant p_{av} a été fixée à 1 Pa.

La figure 2 représente le module du déplacement de la membrane à 1 kHz calculé par la méthode présentée ici (figure 2a), calculé numériquement par la méthode rappelée au-dessus (figure 2b), et à partir d'une théorie modale de la littérature (figure 2c). Ces trois résultats (figure 2 a, b et c) sont en bon accord, les écarts pouvant être expliqués par certaines approximations retenues dans les approches analytiques, qui n'apparaissent pas dans les résultats numériques. La méthode présentée ici est aussi capable de modéliser le comportement du système jusqu'à des fréquences élevées (de l'ordre de 10^5 Hz), sous réserve bien entendu de retenir un nombre suffisant de modes de membrane, comme le montrent les résultats à 60 kHz présentés sur la figure 3.

Tableau 1: Paramètres du fluide.

| Paramètre | Valeur | Unité |
|--|-----------------------|-------------------|
| Pression statique P_0 | 101325 | Pa |
| Température statique T_0 | 296,15 | K |
| Masse volumique statique ρ_0 | 1,18 | kg/m ³ |
| Célérité du son c_0 | 349,5 | m/s |
| Coefficient de viscosité de cisaillement μ | $1,83 \cdot 10^{-5}$ | Pa s |
| Coefficient de viscosité de volume η | $1,098 \cdot 10^{-5}$ | Pa s |
| Coefficient de conduction thermique λ | $24,4 \cdot 10^{-3}$ | W/m/K |
| Rapport des chaleurs massiques γ | 1,4 | - |
| Chaleur massique par unité de masse à pression constante C_p | 1010 | J/kg/K |

5 Conclusion

La formulation présentée ici permet d'exprimer le couplage entre la pression acoustique dans une fine couche de fluide thermo-visqueux et une membrane modélisée comme une source non-homogène étendue, en évitant l'utilisation de tout développement modal pour la pression dont l'exigence de continuité avec celle qui exprime le champ de déplacement de la membrane rend les convergences parfois insuffisantes. L'avantage du formalisme présenté provient aussi de ce qu'il vaut pour

tout type de paroi-source vibrante (membrane, plaque, poutre), en présentant des convergences rapides qui conduisent à des résultats pouvant toujours être au moins aussi précis que ceux obtenus par les méthodes modales classiques.

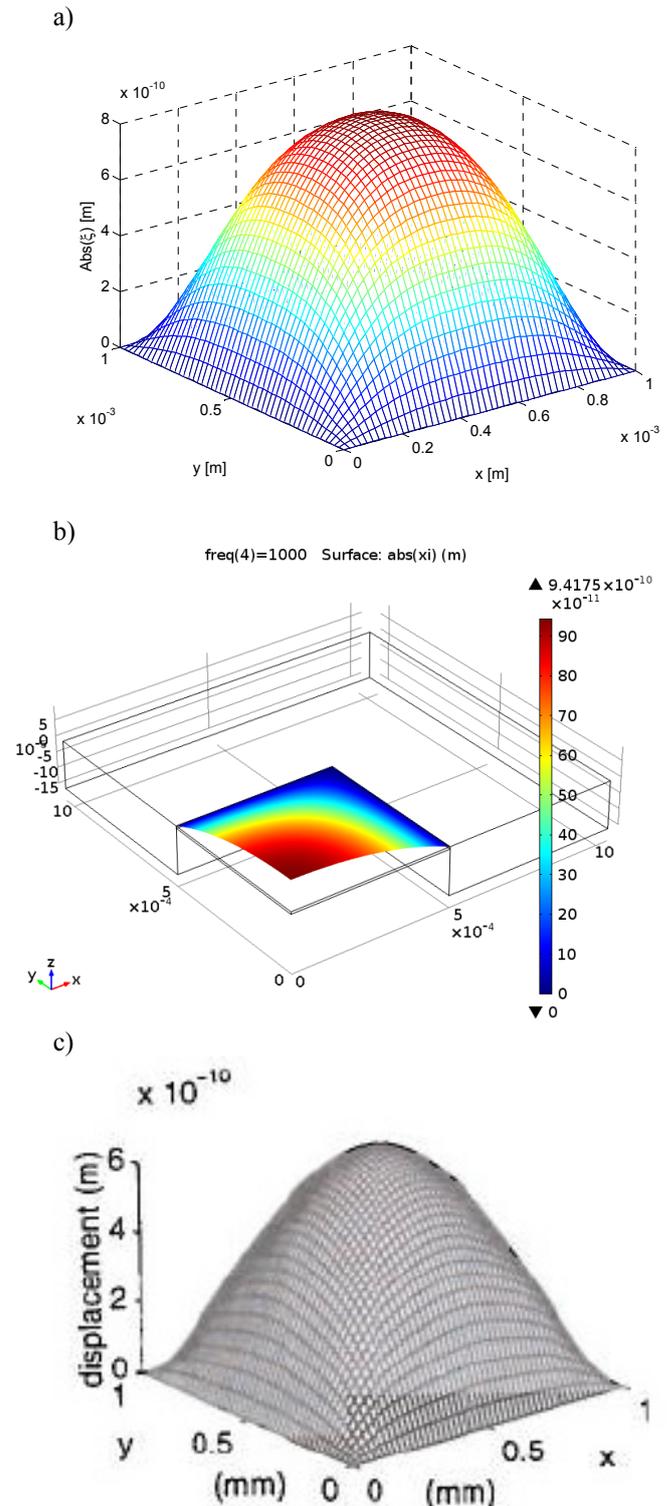


Figure 2 : Champs de déplacement de la membrane à 1 kHz : -a) solution analytique (formulation intégrale), -b) solution numérique (premier quadrant), -c) solution classique (théorie modale) [2].

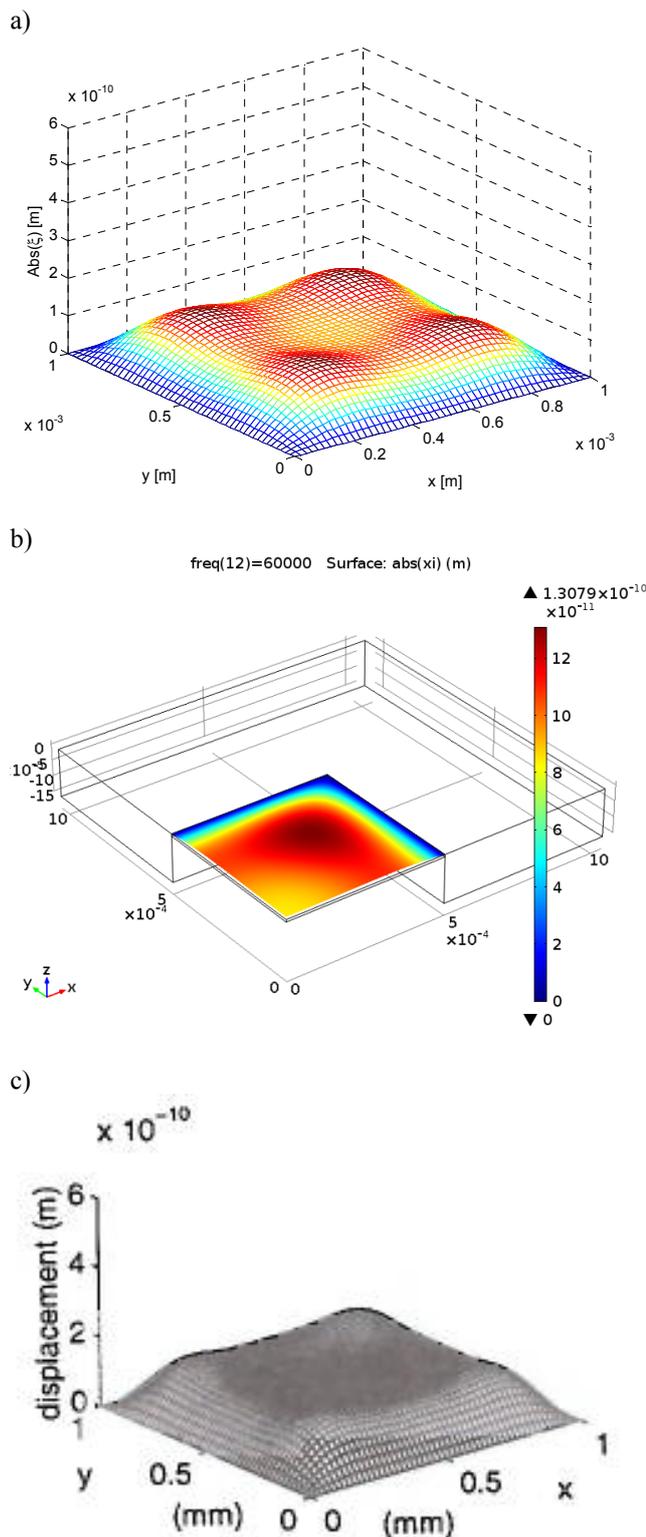


Figure 3 : Champs de déplacement de la membrane à 60 kHz : -a) solution analytique (formulation intégrale), -b) solution numérique (premier quadrant), -c) solution classique (théorie modale) [2].

Références

- [1] A. J. Zuckerwar, Theoretical response of condenser microphones, *J. Acoust. Soc. Am.* **64** (5), 1278-1285 (1978).
- [2] M. Bruneau, A.-M. Bruneau, P. Dupire, A Model for Rectangular Miniaturized Microphones, *Acta Acustica* **3**, 275-282 (1995).
- [3] M. Bruneau, A.-M. Bruneau, Z. Škvor, P. Lotton, An equivalent network modelling the strong coupling between a vibrating membrane and a fluid film, *Acta Acustica* **2**, 223-232 (1994).
- [4] R. S. Grinnip, Advanced Simulation of a Condenser Microphone Capsule, *J. Aud. Eng. Soc.* **54**(3), 157-166 (2006).
- [5] T. Lavergne, S. Durand, M. Bruneau, N. Joly, Dynamic behavior of the circular membrane of an electrostatic microphone: Effect of holes in the backing electrode, *J. Acoust. Soc. Am.* **128** (6), 3459-3477 (2010).
- [6] P. Honzik, A. Podkovskiy, S. Durand, N. Joly, M. Bruneau, Analytical and numerical modeling of an axisymmetrical electrostatic transducer with interior geometrical discontinuity, *J. Acoust. Soc. Am.* **134** (5), 3573-3579 (2013).
- [7] M. Bruneau, *Manuel d'Acoustique fondamentale*, Hermès, Paris (2006).
- [8] T. Valier-Brasier, C. Potel, M. Bruneau, Pressure and shear horizontal guided waves excitation: Nonuniform, time-periodic source distribution of finite extent on the boundaries, *Appl. Phys. Lett.*, **98** (15), 154102 (2011).
- [9] N. Joly, M. Bruneau, R. Bossart, Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermoviscous fluid at rest, *Acta Acustica united with Acustica* **92**, 202-209 (2006).
- [10] N. Joly, Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes: Implementation of the particle velocity and temperature variation, *Acta Acustica united with Acustica* **96**, 102-114 (2010).