



Modélisation numérique de la propagation non linéaire avec pertes viscothermiques : application à la famille des cuivres

B. Lombard^a, C. Vergez^a et E. Cottenceau^b

^aCNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille, France

^bEcole Centrale Marseille, 38 rue Joliot Curie, 13402 Marseille, France

lombard@lma.cnrs-mrs.fr

On considère la propagation d'ondes dans un tube 1D de section variable, dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire. Deux équations scalaires de Chester sont satisfaites par les ondes montantes et descendantes, et sont couplées au niveau de l'entrée et de la sortie du tube via les conditions aux limites. Chaque équation met en jeu des termes d'advection non linéaire et une intégrale fractionnaire modélisant les pertes viscothermiques. Les produits de convolution induits par les dérivées fractionnaires sont remplacés par un ensemble de variables de mémoire satisfaisant des équations différentielles locales en temps, conduisant finalement à un système hyperbolique non linéaire du premier ordre en temps et en espace. Une stratégie de splitting est alors suivie, conduisant à une condition de stabilité numérique optimale : la partie propagative est résolue par un schéma TVD adapté aux chocs, et la partie diffusive est résolue exactement. Les algorithmes sont ensuite validés par comparaison avec des solutions de référence, puis appliqués à des configurations d'acoustique musicale. En régime linéaire, les mesures d'impédance obtenues par simulation numérique directe sont comparées avec succès aux résultats théoriques et expérimentaux. En régime non linéaire, les simulations permettent de déterminer l'évolution des fréquences de résonance en fonction de l'amplitude de l'onde.

1 Introduction

Le spectaculaire enrichissement spectral du son produit par un cuivre à fort niveau sonore s'explique principalement par la propagation non linéaire des ondes acoustiques dans le résonateur [1, 2].

La simulation numérique de ce phénomène est encore un problème ouvert car il faut tenir compte simultanément :

- de la propagation non linéaire, qui peut conduire à la formation d'ondes de choc,
- de la variation continue dans l'espace de la section de l'instrument,
- des pertes visco-thermiques résultant de l'interaction de l'onde avec la paroi de l'instrument.

En régime permanent, une approche par équilibrage harmonique a permis de résoudre le problème dans les tubes droits [17] puis dans les guides à section variable [16]. Notre objectif à terme est la résolution numérique du problème dans le domaine temporel ce qui n'a, à notre connaissance, jamais été réalisé.

Dans cet article, nous présentons le problème à résoudre en section 2, sa modélisation mathématique en section 3, et les schémas numériques utilisés pour sa résolution en section 4. Les premiers résultats sont présentés en section 5.

2 Modélisation physique

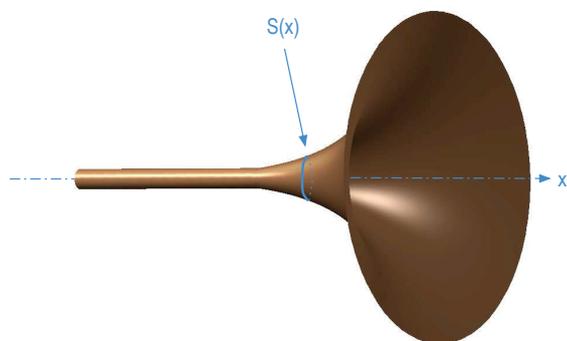


FIGURE 1 – One-dimensional acoustic tube of cross section $S(x)$.

2.1 Notations

On considère un tube circulaire dont le rayon R dépend de l'abscisse x , de section S et de longueur L (figure 1). Les paramètres physiques sont le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constant γ ; la pression à l'équilibre p_0 ; la masse volumique à l'équilibre ρ_0 ; le nombre de Prandtl Pr ; la viscosité cinématique ν ; et le rapport des viscosités de cisaillement et de volume μ_v/μ . On en déduit la vitesse du son linéaire a_0 , la diffusivité du son ν_d , la dissipation dans la couche-limite C :

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad \nu_d = \nu \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{Pr} \right), \quad C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}. \quad (1)$$

On note u la vitesse selon x du gaz. La longueur d'onde de la perturbation initiale est λ . Le nombre de Mach acoustique M , le paramètre de nonlinéarité ε , la pulsation caractéristique ω et l'intensité acoustique I (en dB) sont donnés par :

$$M = \frac{u}{a_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2} M, \quad \omega = \frac{2\pi a_0}{\lambda}, \quad (2)$$

$$I = 20 \log \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_0}{p_{ref}} \varepsilon \right).$$

avec $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

2.2 Equations d'évolution

On considère un régime basse-fréquence ($\omega < \omega^* = \frac{1.84 a_0}{R}$), de sorte que seul le mode plan se propage et que l'approximation 1D est valide [7]. Dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire ($\varepsilon \ll 1$) [12] et en supposant que les variations de section S sont lentes [16], on peut séparer les champs de vitesse aller u^+ et retour u^- qui satisfont les problèmes d'évolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\pm}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\pm a u^\pm + b \frac{(u^\pm)^2}{2} \right) + \frac{a}{S} \frac{dS}{dx} u^\pm \\ = \pm c \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \frac{\partial u^\pm}{\partial x} + d \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad (3a) \\ u^+(0, t) = u_0(t), \quad (3b) \\ u^+(L, t) = u^-(L, t), \quad (3c) \end{array} \right.$$

avec les coefficients

$$a = a_0, \quad b = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad c = \frac{C a_0 \sqrt{\nu}}{R}, \quad d = \frac{\nu_d}{2}. \quad (4)$$

L'équation de Chester (3a) prend en compte l'advection non linéaire (coefficients a et b), les dissipations viscothermiques

aux parois (coefficient c) et la dissipation de volume (coefficient d) [8, 16, 17]. L'opérateur $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre 1/2. Pour une fonction causale $w(t)$, elle s'écrit

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} w(\tau) d\tau, \quad (5)$$

où $*$ désigne le produit de convolution, et $H(t)$ est la fonction d'Heaviside [15]. L'équation (3b) représente la source acoustique, liée à l'instrumentiste. L'équation (3c) est une condition élémentaire d'impédance au niveau du pavillon, qui couple les ondes aller et retour. L'équation (3) porte uniquement sur la vitesse : on peut relier cette dernière à la surpression p^\pm due aux ondes aller (+) et retour (-) par

$$p^\pm = \pm \rho_0 a_0 u^\pm. \quad (6)$$

2.3 Analyse de dispersion

On applique une transformée de Fourier en temps et en espace à (3a)

$$i d k^2 \hat{u}^\pm + \left((\pm a \mp c \chi(\omega)) \hat{u}^\pm + \frac{b}{2} \widehat{u^{\pm 2}} \right) k - \omega \hat{u}^\pm + i \frac{a}{S} \frac{dS}{dx} u^\pm = 0, \quad (7)$$

où k est le nombre d'onde et χ est le symbole de l'intégrateur 1/2 :

$$\chi(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^{1/2}}. \quad (8)$$

En régime linéaire ($b = 0$), pour un guide de section constante et en négligeant la diffusivité du son ($d = 0$), la vitesse de phase $v = \omega / \Re(k)$ et l'atténuation $\alpha = \Im(k)$ s'écrivent

$$v = \frac{a^2 \omega - a c \sqrt{2\omega + c^2}}{a \omega - c \sqrt{\omega/2}}, \quad \alpha = \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{\omega^{3/2}}{a^2 \omega - a c \sqrt{2\omega + c^2}}. \quad (9)$$

Dans le cas-limite sans viscosité ($c = d = 0$), la vitesse de phase est égale à a , et l'atténuation est nulle. Autrement, on a :

$$\begin{cases} v(\omega) \underset{0}{\sim} -c \sqrt{\frac{2}{\omega}}, & \lim_{\omega \rightarrow +\infty} v(\omega) = a, \\ \alpha(0) = 0, & \alpha(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{a^2} \sqrt{\frac{\omega}{2}}. \end{cases} \quad (10)$$

Ces propriétés sont illustrées en figure 1.

3 Modélisation mathématique

3.1 Approximation diffusive

L'intégrale 1/2 (5) dans (3a) est non-locale en temps, nécessitant de garder en mémoire toute l'histoire passée de la solution, ce qui est très coûteux informatiquement. La *représentation diffusive* de l'intégrale fractionnaire constitue une formulation beaucoup plus adaptée à la modélisation numérique. On peut écrire de façon équivalente [10]

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \int_0^{+\infty} \phi(t, \theta) d\theta, \quad (11)$$

où la variable de mémoire ϕ définie par

$$\phi(t, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-(t-\tau)\theta^2} w(\tau) d\tau \quad (12)$$

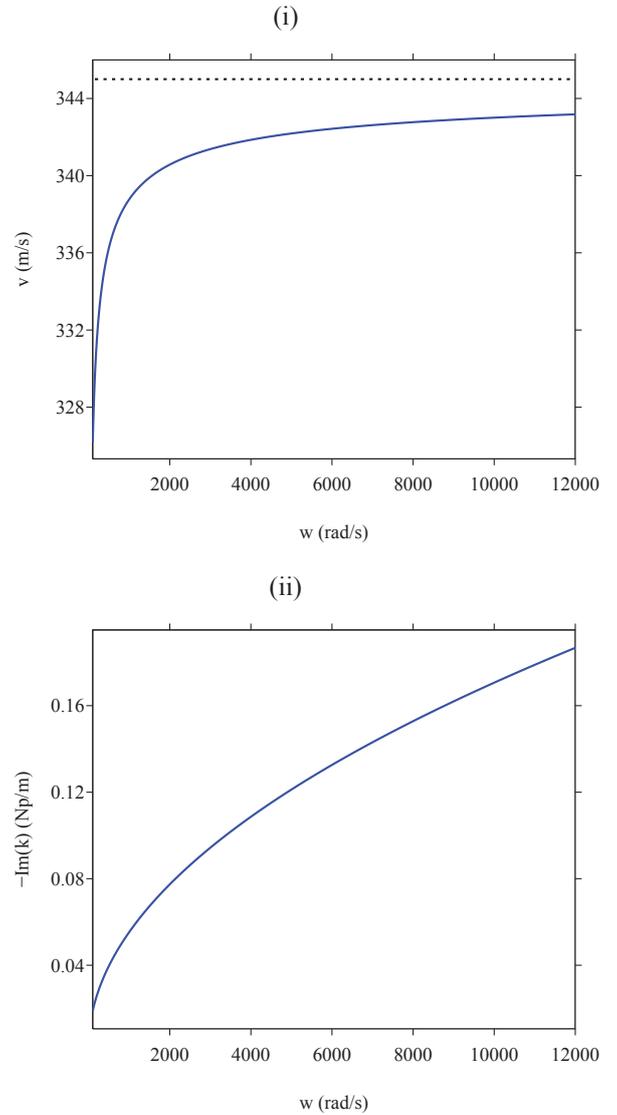


FIGURE 2 – Vitesse de phase (i) et atténuation (ii) en régime linéaire, dans un guide de section constante. La droite horizontale en pointillés (i) désigne la vitesse du son a_0 .

satisfait l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\theta^2 \phi + \frac{2}{\pi} w, \\ \phi(0, \theta) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

La représentation diffusive (11) revient à remplacer le terme non local (5) par une intégrale sur θ de fonctions $\phi(t, \theta)$, qui satisfont des problèmes locaux en temps. L'intégrale (11) est ensuite approchée par une formule de quadrature

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) \approx \sum_{\ell=1}^N \mu_\ell \phi(\theta_\ell, t) = \sum_{\ell=1}^N \mu_\ell \phi_\ell(t), \quad (14)$$

sur N points de quadrature. La détermination des poids μ_ℓ et abscisses θ_ℓ de quadrature est cruciale pour l'efficacité de l'approximation diffusive, et est discutée en section 4.1.

3.2 Système du premier ordre

On remplace l'intégrale 1/2 dans (3a) par son approximation diffusive (14) et l'ensemble d'équations différentielles satisfaites par les fonctions de mémoire ϕ_ℓ

(13). Les vitesses des ondes aller (+) et retour (-) satisfont alors des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\pm}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\pm a u^\pm + b \frac{(u^\pm)^2}{2} \right) + \frac{a}{S} \frac{dS}{dx} u^\pm \quad (15a) \\ = \pm c \sum_{\ell=1}^N \mu_\ell \phi_\ell + d \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad (15b) \\ \frac{\partial \phi_\ell^\pm}{\partial t} - \frac{2}{\pi} \frac{\partial u^\pm}{\partial x} = -\theta_\ell^2 \phi_\ell^\pm, \quad \ell = 1 \dots N, \quad (15c) \\ u^+(0, t) = u_0(t), \quad (15d) \\ u^+(L, t) = u^-(L, t), \quad (15e) \end{array} \right.$$

En posant les vecteurs de $(N + 1)$ inconnues

$$\mathbf{U}^\pm = (u^\pm, \phi_1^\pm, \dots, \phi_N^\pm)^T, \quad (16)$$

les systèmes (15) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^\pm + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}^\pm) = \mathbf{S}^\pm \mathbf{U}^\pm + \mathbf{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}^\pm, \quad (17)$$

où \mathbf{F} est la fonction de flux non linéaire

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}^\pm) = \left(\pm a u^\pm + b \frac{(u^\pm)^2}{2}, -\frac{2}{\pi} u^\pm, \dots, -\frac{2}{\pi} u^\pm \right)^T, \quad (18)$$

\mathbf{G} est la matrice diagonale $(N + 1) \times (N + 1)$ de terme $\text{diag}(d, 0, \dots, 0)$. La matrice diffusives \mathbf{S}^\pm contient les coefficients de l'approximation diffusive :

$$\mathbf{S}^\pm = \begin{pmatrix} -\frac{a}{S} \frac{dS}{dx} & \pm c \mu_1 & \dots & \pm c \mu_N \\ 0 & -\theta_1^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -\theta_N^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

3.3 Propriétés

On note \mathbf{J}^\pm la jacobienne de $\mathbf{F}(\mathbf{U}^\pm)$. Les propriétés suivantes caractérisent les systèmes homogènes déduits de (17) lorsque $\mathbf{S}^\pm = \mathbf{G} = \mathbf{0}$ [13] :

- les valeurs propres de \mathbf{J}^\pm sont ($j = 1, \dots, N + 1$)

$$\lambda_1 = \pm a + b u^\pm, \quad \lambda_j = 0; \quad (20)$$

- l'onde associée à λ_1 est *vraiment non linéaire*, alors que les ondes associées à $\lambda_{j \geq 2}$ sont *linéairement dégénérées*;
- les *invariants de Riemann* sont

$$\mathcal{R}_{\lambda_1} := \phi_j + \frac{2}{\pi} \ln(\pm a + b u^\pm), \quad \mathcal{R}_{\lambda_{j \geq 2}} := u. \quad (21)$$

Ces propriétés montrent en particulier que ces systèmes sont *hyperboliques* (ie propagation à vitesse réelle et finie) mais pas *strictement hyperboliques*.

Par ailleurs, les valeurs propres des matrices diffusives \mathbf{S}^\pm sont ($j = 1, \dots, N + 1$) :

$$\kappa_1 = -\frac{a}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \kappa_j = -\theta_j^2. \quad (22)$$

Pour une section constante ou croissante ($\frac{dS}{dx} \geq 0$), cela assure la décroissance de l'énergie mécanique.

Enfin, une analyse de Fourier de (15) conduit à la même relation de dispersion (7) que pour le système d'origine (3). Le symbole χ dans (8) doit alors être remplacé par le symbole de l'approximation diffusive

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\mu_\ell}{\theta_\ell^2 + i\omega}. \quad (23)$$

4 Modélisation numérique

4.1 Méthodes de quadrature

On détermine les poids μ_ℓ et abscisses θ_ℓ de quadrature dans (15) par optimisation sur les symboles (8) et (23). Pour un nombre K de pulsations ω_k , on introduit la *fonction objectif*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\{(\mu_\ell, \theta_\ell)\}_\ell; N, K) &= \sum_{k=1}^K \left| \frac{\tilde{\chi}(\omega_k)}{\chi(\omega_k)} - 1 \right|^2, \\ &= \sum_{k=1}^K \left| \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \mu_\ell \frac{(i\omega_k)^{1/2}}{\theta_\ell^2 + i\omega_k} - 1 \right|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

à minimiser par rapport aux paramètres $\{(\mu_\ell, \theta_\ell)\}_\ell$ pour $\ell = 1, \dots, N$. Une optimisation non linéaire avec contrainte de positivité $\mu_\ell \geq 0$ et $\theta_\ell \geq 0$ est choisie pour cela. La contrainte supplémentaire $\theta_\ell \leq \theta_{\max}$ est aussi introduite pour la stabilité de l'algorithme décrit en section 4.2. Les $3N$ contraintes sont relaxées en posant $\mu_\ell = \mu_\ell'^2$ et $\theta_\ell = \theta_\ell'^2$ et en résolvant le nouveau problème d'optimisation à N contraintes

$$\min_{\{(\mu_\ell', \theta_\ell')\}_\ell} \mathcal{J}(\{(\mu_\ell'^2, \theta_\ell'^2)\}_\ell; N, K) \quad \theta_\ell'^2 \leq \theta_{\max} \text{ for } \ell = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Le problème (25) étant non linéaire et non quadratiques en θ_ℓ' , nous mettons en oeuvre l'algorithme SolvOpt [18] basé sur la méthode itérative de Shor [19]. Les valeurs initiales utilisées dans l'algorithme d'optimisation doivent être choisies avec soin. Pour cela, nous utilisons les coefficients obtenus par polynômes orthogonaux de Jacobi modifiés [5] : voir méthode 3 de [14]. Enfin, les pulsations ω_k pour $k = 1, \dots, K$ dans (24) sont choisies linéairement sur une échelle logarithmique sur l'intervalle d'optimisation $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$:

$$\omega_k = \omega_{\min} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{K-1}}. \quad (26)$$

4.2 Schéma numérique

Pour intégrer le système (17), on introduit une grille uniforme en espace de pas Δx , et un pas de temps variable Δt_n (noté par soucis de simplicité Δt). L'approximation des solutions exactes $\mathbf{U}^\pm(x_j = j \Delta x, t_n = t_{n-1} + \Delta t)$ est notée $\mathbf{U}_j^{n\pm}$. Une discrétisation explicite directe de (17) n'est pas optimale, car le pas de temps est alors borné par l'inverse du rayon spectral de \mathbf{S}^\pm , qui croît avec le nombre de variables diffusives N .

On adopte ici une stratégie de *splitting*, résolvant successivement des équations propagative

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^\pm + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}^\pm) = \mathbf{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}^\pm, \quad (27)$$

et diffusive

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^\pm = \mathbf{S}^\pm \mathbf{U}^\pm. \quad (28)$$

Les opérateurs discrets associés à (27) et (28) sont notés respectivement \mathbf{H}_a^\pm et \mathbf{H}_b^\pm . Le Strang splitting [13] est alors utilisé pour passer de l'instant t_n à t_{n+1} , en résolvant successivement (27) et (28) avec des pas de temps adéquats :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{U}_j^{(1)\pm} &= \mathbf{H}_b^\pm\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_j^{(n)\pm}, \\ \bullet \quad \mathbf{U}_j^{(2)\pm} &= \mathbf{H}_a^\pm(\Delta t) \mathbf{U}_j^{(1)\pm}, \\ \bullet \quad \mathbf{U}_j^{(n+1)\pm} &= \mathbf{H}_b^\pm\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_j^{(2)\pm}. \end{aligned} \quad (29)$$

L'algorithme (29) introduit une erreur de splitting d'ordre 2.

L'équation (27) de la partie propagative du splitting est résolue par un schéma TVD (Total Variation Diminishing) d'ordre 2 pour équations hyperboliques [13] :

$$\begin{aligned} u_j^{(n+1)\pm} &= u_j^{(n)\pm} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^\pm - F_{j-1/2}^\pm) \\ &\quad + d \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{(n)\pm} - 2u_j^{(n)\pm} + u_{j-1}^{(n)\pm}), \\ \phi_{j,\ell}^{(n+1)\pm} &= \phi_{j,\ell}^{(n)\pm} + \frac{1}{\pi} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^{(n)\pm} - u_{j-1}^{(n)\pm}), \quad \ell = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (30)$$

où $F_{j\pm 1/2}^\pm$ est la fonction de flux numérique pour l'équation d'advection-Burgers dans (18). En définissant la vitesse maximale $a_{\max}^{(n)}$ et le nombre de Péclet discret Pe

$$a_{\max}^{(n)} = \max\left(\pm a + b \max_j(u_j^{(n)})\right), \quad Pe = a_{\max}^{(n)} \frac{\Delta x}{2d} \gg 1, \quad (31)$$

l'opérateur discret \mathbf{H}_a^\pm dans (30) est stable si

$$\beta = \frac{a_{\max}^{(n)} \Delta t}{\Delta x} \leq \left(1 + \frac{1}{Pe}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{1}{Pe} \approx 1, \quad (32)$$

ce qui revient à la condition CFL usuelle.

L'équation (28) de la partie diffusive est résolue exactement :

$$\mathbf{H}_b^\pm\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_j^\pm = e^{\mathbf{S}^\pm \frac{\Delta t}{2}} \mathbf{U}_j^\pm, \quad (33)$$

avec l'exponentielle de matrice déduite de (19)

$$e^{\mathbf{S}^\pm \tau} = \begin{pmatrix} e^{-\Omega \tau} & \pm \gamma_1 (e^{-\Omega \tau} - e^{-\theta_1^2 \tau}) & \dots & \pm \gamma_N (e^{-\Omega \tau} - e^{-\theta_N^2 \tau}) \\ 0 & e^{-\theta_1^2 \tau} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-\theta_N^2 \tau} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

et les coefficients ($\ell = 1, \dots, N$)

$$\Omega = \frac{a}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \gamma_\ell = \frac{c \mu_\ell}{\Omega - \theta_\ell^2}. \quad (35)$$

Cette étape est de précision infinie (à la représentation machine près) et est inconditionnellement stable.

Finalement, l'algorithme de splitting (29) conduit à une méthode d'ordre 2 et stable sous la condition CFL.

5 Résultats

5.1 Configuration

γ	p_0 (Pa)	ρ_0 (kg/m ³)	Pr	ν (m ² /s)	μ_v/μ
1.403	10^5	1.177	0.708	$1.57 \cdot 10^{-5}$	0.60

TABLEAU 1 – Paramètres physiques de l'air à 15 °C.

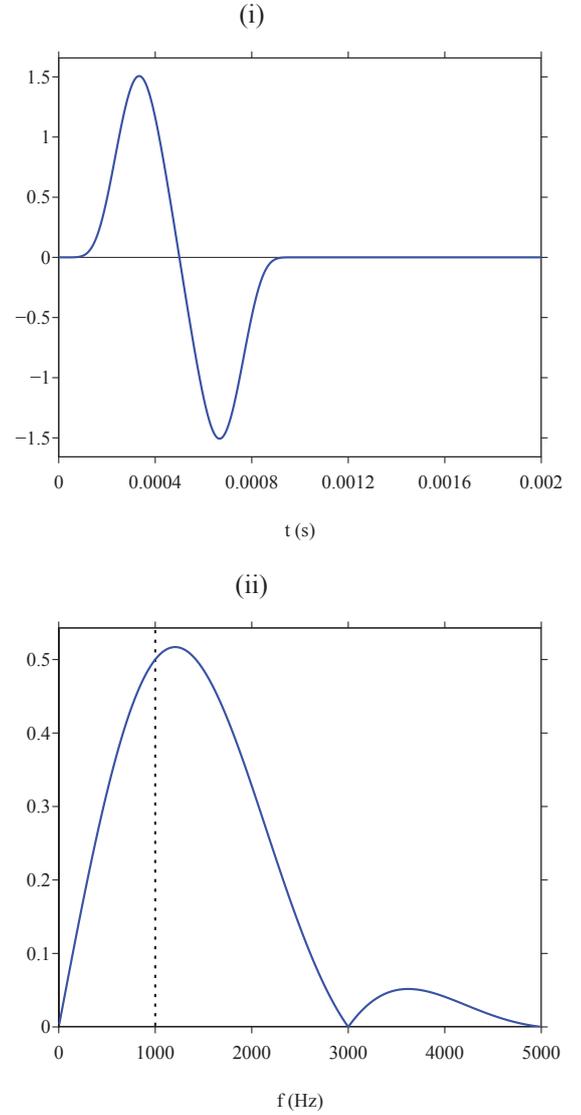


FIGURE 3 – Source excitatrice : évolution temporelle (36) (i), module du spectre (ii). La droite verticale pointillée dans (ii) désigne la fréquence centrale $f_c = 1$ kHz.

On considère un tube circulaire de rayon constant $R = 7$ mm et de longueur $L = 1.4$ m. Le tube est discrétisé sur $N_x = 2000$ points en espace. Les coefficients a , b , et c dans (15b) sont déduits de (4) et des paramètres physiques donnés dans le tableau 1. Le pas de temps Δt découle de la condition (32), avec le nombre CFL $\beta = 0.95$. La source excitatrice modélisant la bouche de l'instrumentiste (15d) est une ondelette de classe C^6

$$u_0(t) = \begin{cases} V \sum_{m=1}^4 a_m \sin(b_m \omega_c t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{f_c}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (36)$$

de fréquence centrale $f_c = \omega_c/2\pi = 1$ kHz et de coefficients $b_m = 2^{m-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = -21/32$, $a_3 = 63/768$ et $a_4 = -1/512$. L'évolution temporelle de (15d) et l'évolution fréquentielle de sa transformée de Fourier sont représentées en figure 2, pour $V = 1$ m/s. Les pertes viscothermiques sont modélisées par $N = 8$ variables de mémoire, optimisées sur l'intervalle de pulsation [$\omega_{\min} = \omega_c/10$, $\omega_{\max} = \omega_c \times 10$] (26), avec $\theta_{\max} = 100 \omega_c$.

5.2 Validation

La figure 4 illustre la qualité de l'approximation diffusive des dérivées fractionnaires. En (i) et (ii), on compare la vitesse de phase et l'atténuation du modèle de Chester aux quantités obtenues après approximation diffusive. Pour cela, on résout (7), avec respectivement (8) et (23). Pour $N = 6$ variables de mémoire, la qualité de l'approximation diffusive est très bonne. En (iii), on représente $\left| \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\chi(\omega)} - 1 \right|$ en échelle logarithmique. On observe que l'erreur de modèle diminue approximativement d'un facteur 10 lorsque N est augmenté de 2.

La figure 5 représente la pression p^+ émise par la source u_0 (15d) et se dirigeant selon les x croissants, en régime linéaire ($b = 0$) et non linéaire ($b \approx 1.4$). La pression est déduite de la vitesse par la relation (6). L'amplitude de la source (36) est $V = 20$ m/s, ce qui correspond à un paramètre de non linéarité $\varepsilon = 0.03$ et à une intensité acoustique $I = 172$ dB (2). On observe le distorsion de l'onde lorsque le terme non linéaire est pris en compte, conduisant à une *onde en N* [12].

5.3 Simulation d'impédance

Lorsque l'onde + atteint le bord droit du tube en $x = L$, l'onde - est émise et se propage selon les x décroissants. Un récepteur en $x = 0$ mesure la pression $p^-(0, t_n)$. La pression incidente $p^+(0, t_n)$ correspondant à la source excitatrice, on connaît ainsi $p(0, t) = p^+(0, t) + p^-(0, t)$. En régime linéaire, on en déduit après transformées de Fourier en temps de p^\pm une estimation numérique de l'impédance Z du tube :

$$Z(\omega) = Z_c \frac{1 + r(\omega)}{1 - r(\omega)}, \quad (37)$$

avec

$$Z_c = \frac{\rho_0 a_0}{S}, \quad r(\omega) = \frac{\widehat{p}^-(0, \omega)}{\widehat{p}^+(0, \omega)}. \quad (38)$$

La figure 6 représente le module et l'argument de l'impédance déduites de simulations numériques. Ces valeurs sont comparées à l'expression analytique [7]

$$Z = i Z_c \tan(kL), \quad k = \frac{\omega}{a_0} - i(1+i)3 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{f}}{R}. \quad (39)$$

On observe un excellent accord, excepté pour les fréquences très basses. Les différences sont dues à des imprécisions dans le calcul des rapports de transformées de Fourier (38), le spectre de l'ondelette (36) s'annulant à fréquence nulle.

6 Conclusion

Nous avons proposé une modélisation numérique temporelle des équations de Chester, décrivant la propagation non linéaire et les pertes viscothermiques dans un tube de section éventuellement variable. Nous avons mis en place un protocole numérique pour simuler une mesure d'impédance, et comparé les résultats à une solution de référence en régime linéaire. L'objectif est maintenant d'étendre ce protocole au régime non linéaire. A partir de là, nous serons en mesure de déterminer les pics de résonance en fonction de l'amplitude du forçage. Une comparaison avec des mesures expérimentales est prévue prochainement.

Références

- [1] A. Hirschberg, J. Gilbert, R. Msallam, A. P. J. Wijnands, Shock waves in trombones, *J. Acoust. Soc. Am.*, **99-3**, 1754-1758 (1996).

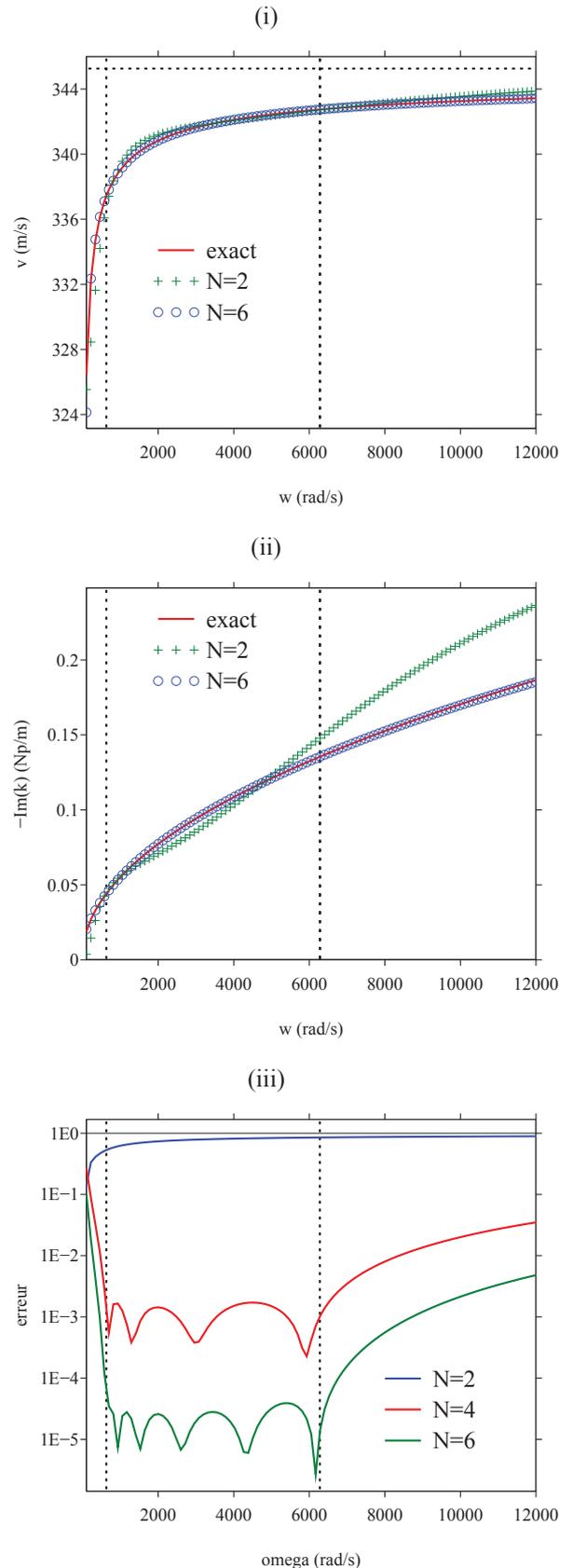


FIGURE 4 – Vitesse de phase (i) et atténuation (ii) en régime linéaire, dans un guide de section constante : comparaison entre le modèle de Chester (3) et le modèle obtenu par approximation diffusive (15); erreur $\left| \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\chi(\omega)} - 1 \right|$ (iii). La droite horizontale en pointillés (i) désigne la vitesse du son a_0 . Les droites verticales en pointillés désignent l'intervalle d'optimisation $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ de l'approximation diffusive.

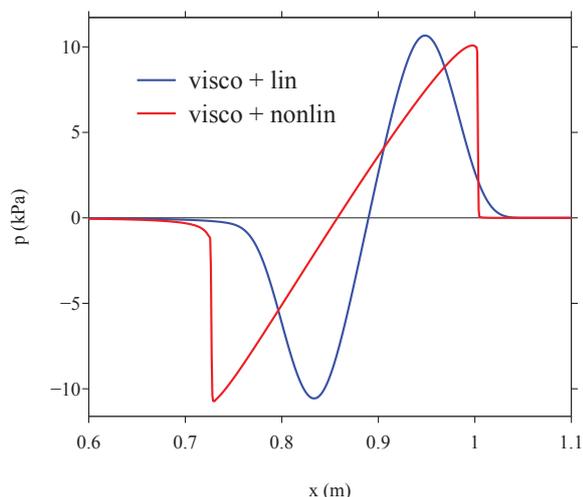


FIGURE 5 – Pression dans le tube à $t \approx 3$ ms, en régime linéaire et non linéaire.

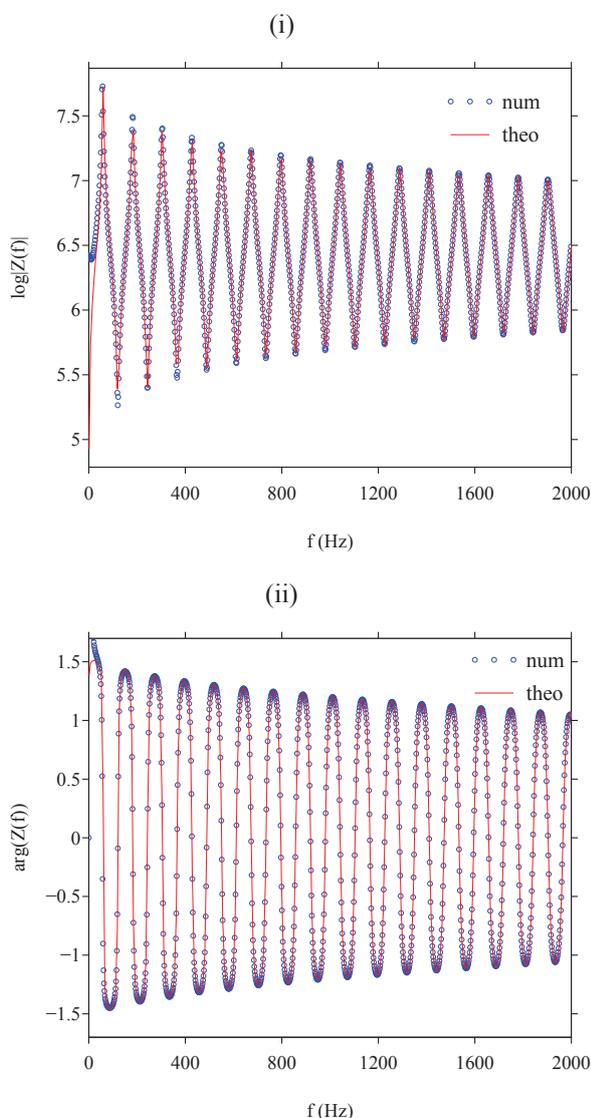


FIGURE 6 – Impédance simulée et analytique : module (i) et phase (ii).

- [2] J. Gilbert, J. F. Petiot, Nonlinéarités dans les instruments de type cuivre : résultats expérimentaux, In *Actes de Colloque du quatrième Congrès Français d'Acoustique, Marseille*, (1997).
- [3] S. Bilbao, Time-domain simulation of brass instruments, in *Proceedings of Forum Acusticum, Aalborg, Denmark* (2011).
- [4] S. Bilbao, J. Chick, Finite difference time domain simulation for the brass instrument bore, *J. Acoust. Soc. Am.*, **134-5**, 386-3871 (2013).
- [5] C. Birk, C. Song, An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations, *Comput. Mech.*, **46**, 721-734 (2010).
- [6] E. Blanc, G. Chiavassa, B. Lombard, Biot-JKD model : simulation of 1D transient poroelastic waves with fractional derivatives, *J. Comput. Phys.*, **237**, 1-20 (2013).
- [7] A. Chaigne, J. Kergomard, *Acoustique des Instruments de Musique*, Belin (2008).
- [8] W. Chester, Resonant oscillations in closed tubes, *J. Fluid Mech.*, **18**, 44-64 (1964).
- [9] J. F. Deü, D. Matignon, Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme, *Comput. Math. App.*, **59**, 1745-1753 (2010).
- [10] K. Diethelm, An investigation of some nonclassical methods for the numerical approximation of Caputo-type fractional derivatives, *Numer. Algor.*, **47**, 361-390 (2008).
- [11] B.P. Flannery, W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press (1992).
- [12] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press (1998).
- [13] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, 2nd edition, Birkhäuser-Verlag (1992).
- [14] B. Lombard, J. F. Mercier, Numerical modeling of nonlinear acoustic waves in a tube connected with Helmholtz resonators, *J. Comput. Phys.*, **259**, 421-443 (2014).
- [15] D. Matignon, *An introduction to fractional calculus, Scaling, Fractals and Wavelets* (Digital Signal and Image Processing Series), ISTE-Wiley (2008).
- [16] L. Menguy, *Propagation acoustique non linéaire dans les guides monodimensionnels*, Thèse de l'Université du Maine (2001).
- [17] L. Menguy, J. Gilbert, Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes : solutions and experiments, *Acta Acustica united with Acustica*, **86-5**, 798-810 (2000).
- [18] A. Reikik, R. Brenner, Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization, *Mech. Res. Comm.*, **38**, 305-308 (2011).
- [19] N. Shor, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer-Verlag (1985).