



Analyse de stabilité globale et instabilité hydrodynamique dans un conduit traité acoustiquement

L. Pascal, E. Piot et G. Casalis
ONERA, 2 av Edouard Belin, 31055 Toulouse, France
estelle.piot@onera.fr

Les conduits dont les parois sont traitées à l'aide de matériaux absorbants acoustiques (liners) peuvent exhiber en présence d'écoulement une instabilité hydrodynamique. Il a été montré dans la littérature que lorsqu'une onde acoustique se propage le long du liner dans une configuration où l'instabilité hydrodynamique se développe, l'onde acoustique est fortement amplifiée au lieu d'être atténuée. Il a aussi été montré par analyse de stabilité locale que le mode hydrodynamique, généralement convectivement instable, peut dans certaines configurations être absolument instable. Nous allons dans nos travaux nous intéresser à cette problématique en mettant en œuvre des outils d'analyse de stabilité globale, c'est-à-dire que l'on va étudier la stabilité du problème consistant en l'écoulement de conduit en présence d'un liner de taille finie (et non infini comme en stabilité locale), et donc prendre en compte la présence des ruptures d'impédance entre la zone traitée acoustiquement et la paroi rigide. Nous étudierons comment la présence de ces ruptures d'impédance impacte les propriétés de stabilité de l'écoulement par rapport aux résultats de stabilité locale.

1 Introduction

L'analyse de stabilité locale a permis de montrer dans de nombreuses études l'existence d'une onde hydrodynamique instable se développant sur un liner. En particulier, il a été montré que cette instabilité, bien que généralement convectivement instable, peut être absolument instable [5]. Marx et Aurégan [8] ont notamment trouvé une telle instabilité absolue des équations d'Euler linéarisées en considérant un écoulement porteur représentatif d'un écoulement turbulent.

Cet article a pour objectif de présenter l'application des outils de stabilité globale à une configuration proche de celle étudiée dans la référence [8]. Cette approche permet, entres autres, d'évaluer l'effet d'un liner de dimension finie.

2 Présentation du cas d'étude

La configuration étudiée consiste en un conduit d'axe x de hauteur $y \in [0, H]$ où est placé un liner de longueur L . Ce conduit est traversé par un écoulement porteur cisailé défini par $\underline{U}_0(x, y) = U_0(y)\underline{e}_x$. La célérité du son a_0 et la masse volumique ρ_0 sont supposées être constantes. L'écoulement de base est considéré stationnaire, subsonique et homentropique. Les différentes grandeurs sont adimensionnalisées en prenant H comme longueur de référence, a_0 comme vitesse de référence et $\rho_0 a_0^2$ comme pression de référence.

Contrairement à une étude de stabilité locale, l'étude de stabilité globale ne fait pas d'hypothèse sur l'évolution spatiale de la perturbation acoustique qui s'écrit alors $\varphi(x, y)e^{-i\omega t}$. Dans le cadre des hypothèses énoncées précédemment, les équations d'Euler linéarisées régissant l'évolution d'une telle perturbation acoustique s'écrivent :

$$-i\omega\varphi + \underbrace{\begin{pmatrix} U_0 & 0 & 1 \\ 0 & U_0 & 0 \\ 1 & 0 & U_0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}_x} \partial_x \varphi + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}_y} \partial_y \varphi + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \partial_y U_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{B}} \varphi = 0 \quad (1)$$

où $\varphi = (\underline{u} = (u, v), p)$.

L'écoulement de base est calculé de façon à être représentatif d'un écoulement turbulent en intégrant l'équation [9, eq. (2.3)] où la viscosité turbulente est donnée par la formule de Cess. Pour plus de détails le lecteur est invité à se tourner vers [8, section 2]. L'écoulement ainsi obtenu possède une sous-couche visqueuse, une zone tampon et une zone logarithmique.

Les équations d'Euler linéarisées sont associées à une condition aux limites de glissement au niveau des parois rigides $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ et à une condition aux limites d'impédance au niveau du liner

$$Z\underline{u} \cdot \underline{n} = \frac{p}{\underline{u} \cdot \underline{n}} \quad (2)$$

où \underline{n} est le vecteur unitaire normal sortant du conduit.

Dans leur article [8], Marx et Aurégan ont choisi un liner caractérisé par la loi d'impédance spécifique suivante :

$$Z(\omega) = i\phi \cotan\left(\omega h + i\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3)$$

où $\phi = 1.25$, $A = 4.25$ et $\varepsilon = 0.3$.

3 Méthode numérique

3.1 Conditions aux limites amont et aval

Afin de borner le domaine d'étude, des couches PML sont placées en amont en $x = x_0^s$ et en aval en $x = x_0^d$. L'idée générale de la méthode est d'appliquer une transformation spatio-temporelle définie par $t \rightarrow t + \tau x$ ainsi qu'un prolongement analytique d'expression $x \rightarrow x + i\Sigma(x)/\omega$ de la solution dans les couches PML. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la référence [1].

À l'issue de cette transformation spatio-temporelle et de ce prolongement analytique, les équations d'Euler linéarisées Eq. (1) sont modifiées en :

$$\Sigma'(\underline{A}_y \partial_y + \underline{B})\varphi = i\omega \left(\underline{A}_j \partial_j + \underbrace{(\underline{B} + \Sigma' I_3 + \Sigma' \tau \underline{A}_x)}_{\underline{\tilde{B}}} - i\omega \right) \varphi \quad (4)$$

où la fonction $\Sigma(x)$ vaut $-\sigma_0(x_0^s - x)^\beta$ pour $x < x_0^s$, $\sigma(x - x_0^d)^\beta$ pour $x > x_0^d$ et 0 sinon (on retrouve ainsi bien eq. (1) dans la zone physique). De plus, $\tau = \bar{M}/(1 - \bar{M}^2)$ où \bar{M} est le nombre de Mach moyen dans une section du conduit.

3.2 Méthode Galerkin discontinue

Les équations eq.(4) sont discrétisées au moyen de la méthode Galerkin discontinue en suivant la référence [6]. L'idée générale de la méthode est de rechercher sur chaque triangle D_l du maillage la solution dans l'espace $P^2(D_l)$ des polynômes d'ordre 2 sur D_l en imposant une condition d'orthogonalité entre les équations du problème eq. (4) et des fonctions tests, notées ici $\underline{\psi}_m$, prises également dans

$P^2(D_l)$. La formulation variationnelle ainsi obtenue sur l'élément D_l vis-à-vis de la fonction $\underline{\psi}_m$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{D_l} \underline{\Sigma}'(A_y \partial_y + B) \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m d\Omega + \int_{\partial D_l} \underline{\tilde{\Pi}} \cdot \underline{\Psi}_m d\Gamma \\ & = \int_{D_l} i\omega \left(A_j \partial_j + \underline{\tilde{B}} - i\omega \right) \underline{\varphi} \cdot \underline{\psi}_m d\Omega + \int_{\partial D_l} \underline{\Pi} \cdot \underline{\Psi}_m d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

où $\underline{\tilde{\Pi}}$ et $\underline{\Pi}$ sont les termes de flux numériques, définis comme des fonctions des traces intérieure (φ^-) et extérieure (φ^+) ainsi que du vecteur normal unitaire sortant $\underline{n} = (n_x, n_y)$. $\underline{\Pi}$ est donné dans la référence [6] tandis que $\underline{\tilde{\Pi}}$ est obtenu en suivant un raisonnement similaire et vaut :

$$\underline{\tilde{\Pi}} = -\frac{\underline{\Sigma}' n_y}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} (\underline{\varphi}^+ - \underline{\varphi}^-)$$

entre deux éléments (flux décentré amont) et

$$\underline{\Pi} = -\underline{\Sigma}' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & -n_y & 0 \end{pmatrix} \underline{\varphi}^-$$

sur les frontières du domaine.

3.3 Implantation de la condition aux limites d'impédance

L'implantation d'une condition d'impédance se fait en suivant la méthode proposée dans la référence [2]. Cette méthode se distingue de la méthode classique visant à imposer directement eq. (2) afin de modéliser l'effet des cavités et de la plaque perforée du liner. En effet, la méthode consiste, d'une part, à inclure les cavités du liner (de hauteur h) dans le domaine de calcul en les modélisant par des éléments unidimensionnels et, d'autre part, à modéliser la plaque perforée en imposant une condition de Darcy. Cette dernière relie le saut de pression acoustique entre le conduit et les cavités du liner à la vitesse normale acoustique (continue de part et d'autre de la plaque perforée) par la résistance R de la plaque perforée :

$$R \underline{u} \cdot \underline{n} = p^{\text{conduit}} - p^{\text{cavite}}. \quad (6)$$

La méthode initiale proposée dans la référence [2] est modifiée afin d'ajouter le terme ε et permet finalement d'implanter une condition d'impédance de loi :

$$Z(\omega) = R + i \cotan(\omega h + i\varepsilon/2). \quad (7)$$

La résolution dans les éléments unidimensionnels représentant les cavités par la méthode Galerkin discontinue se fait en simplifiant la formulation eq. (5). Le flux numérique imposant la condition de Darcy eq. (6) s'écrit :

$$\underline{\Pi} = \underline{A}_j n_j \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} + \frac{R}{2} \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & 0 \\ n_x n_y & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}. \quad (8)$$

Cette méthode, initialement développée pour une application en domaine temporel, offre l'avantage de rendre linéaire le problème aux valeurs propres eq. (1) associée à la condition aux limites eq. (7) bien que cette dernière soit non linéaire vis-à-vis de ω .

La loi d'impédance eq. (7) étant différente de celle utilisée par Marx et Aurégan [8] eq. (3), les paramètres R , h et ε sont recherchés de façon à ce que eq. (7) se rapproche le plus possible de eq. (3) dans la gamme de pulsation $\omega \in [26 \times 10^{-3}; 1.11]$. L'application d'un algorithme de Levenberg-Marquardt donne $R = 0.07$, $h = 4.25$ et $\varepsilon = 0.244$. Les deux lois d'impédance sont tracées sur la figure 1.

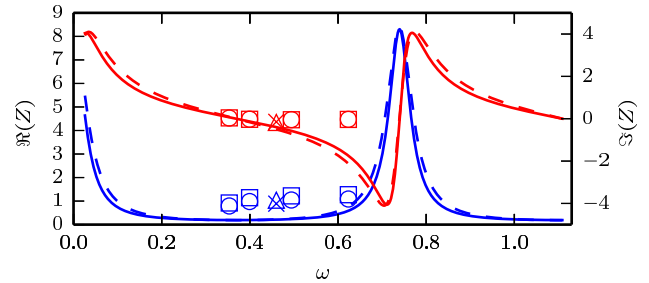


FIGURE 1 – Résistance (courbe bleu) et réactance (courbe rouge) des lois d'impédance eq. (7) (trait continu) et eq. (3) (pointillés). Les ronds et les carrés correspondent aux valeurs de l'impédance obtenues pour une valeur de la pulsation égale aux quatre valeurs propres isolées visibles figure 2 respectivement à partir des formules (7) et (3). Les croix et triangles donnent la valeur de l'impédance obtenue respectivement avec les formules (7) et (3) à partir de $\omega^l = 0.46 + 0.214i$.

Un bon accord est observé entre les deux lois d'impédance. En particulier, l'erreur relative sur la valeur de la fréquence de résonance (définie par $\Im(Z) = 0$) est de 4×10^{-4} entre ces deux lois. En revanche une erreur relative de 15% est obtenue pour la pulsation absolue calculée dans [8] $\omega = \omega^l = 0.46 + 0.214i$ (la partie réelle de ω^l a été communiquée par les auteurs de [8]).

3.4 Résolution du problème aux valeurs propres et filtrage des modes parasites

Le problème aux valeurs propres eq. (5) quadratique vis-à-vis de ω est linéarisé en définissant les modes propres comme étant les couples $(\omega; (\underline{\varphi}, i\omega\underline{\varphi}))$. La taille du problème aux valeurs propres, déjà relativement importante étant donné que les fonctions propres dépendent des deux directions de l'espace, est alors doublée. La résolution du problème aux valeurs propres est effectuée de façon itérative grâce à la méthode de Krylov-Schur permettant d'obtenir une portion du spectre autour d'une cible notée σ . À noter qu'en pratique, les modes trop éloignés de la cible peuvent être sujets à d'importantes erreurs numériques.

Outre de doubler la taille du problème, la linéarisation du problème aux valeurs propres eq. (5) a aussi pour conséquence bien connue de faire apparaître des modes parasites. De même, l'utilisation de PML mène également à l'obtention de modes non physiques appelés modes de Bérenger. Ces derniers sont filtrés en suivant la méthode proposée par Shi et collab [4]. En partant du constat que les modes de Bérenger existent principalement dans les couches PML, le filtrage est effectué en comparant l'énergie contenue dans le domaine physique à celle dans le domaine PML.

L'énergie est ici choisie comme $\int \underline{\varphi}^H \cdot \underline{\varphi} d\Omega$ où H dénote le transconjugué.

Bien que définie afin de s'affranchir des modes de Bérenger, cette opération de filtrage s'avère en pratique filtrer également les modes parasites liés à la linéarisation de eq. (5).

4 Résultats de stabilité globale

4.1 Maillage et PML

Le liner a pour longueur $L = 0.9$ et les portions rigides en amont et aval ont pour dimension $(x_0^d - l)/2 = 0.9$. La couche PML est de dimension $d = 1$ et les paramètres sont $\sigma_0 = 20$ et $\beta = 1$.

Afin de bien prendre en compte l'écoulement porteur, le maillage en proche paroi est construit en suivant une loi géométrique. Le pas de maillage à la paroi est de $\Delta h = 6.6 \times 10^{-4}$, ce qui permet de bien capter le cisaillement de l'écoulement porteur, notamment dans la sous-couche visqueuse.

4.2 Spectre

Dans un premier temps, les parties réelle et imaginaire de la cible σ sont fixées respectivement à partir de la fréquence d'excitation et du taux d'amplification temporel donné par Marx et Aurégan [8] : $\sigma = 0.39 + 0.24i$. Le spectre obtenu est tracé figure 2. Il est composé de quatre valeurs propres isolées instables et d'un ensemble de modes faiblement instables formant une branche. À l'issue de l'opération de filtrage, aucun de ces modes n'a été classé comme non physique. Afin de s'assurer du caractère physique ou non des valeurs propres les plus éloignées de la cible, deux autres calculs sont effectués avec comme cibles $\sigma = 0.64 + 0.45i$ et $\sigma = 0.39 + 0.02i$. Les deux spectres obtenus sont respectivement tracés figure 3 et figure 4. Le filtrage de ces deux spectres (voir figures) indique que les quatre modes isolés visibles figure 2 sont physiques contrairement à la branche de valeurs propres faiblement instables. Par la suite, nous nous intéresserons uniquement à ces quatre modes physiques. Bien que possiblement physiques, nous délaisserons les trois modes isolés supplémentaires obtenus pour $\sigma = 0.64 + 0.45i$.

Par rapport aux résultats obtenus par Marx et Aurégan [8], il est observé que plusieurs modes instables sont obtenus. De plus, aucun de ces modes ne correspond précisément au taux d'amplification donné par Marx et Aurégan. D'après la figure [8, figure 11], l'analyse spatio-temporelle a pourtant été effectuée en partant d'une branche L_ω de partie imaginaire égale à 0.82, valeur supérieure au taux d'amplification des pulsations propres visibles figure 2. De plus, les parties réelles des valeurs propres données par la stabilité globale sont trop proches pour incriminer le choix d'une partie réelle de L_ω trop peu étendue.

Parmi les raisons expliquant les écarts observés avec l'étude de stabilité locale effectuée dans la référence [8], peuvent être citées :

- la différence de modèle d'impédance. En effet, sur la figure 1 sont tracées les valeurs de la résistance et de la réactance données par eq. (3) et eq. (7) lorsque la pulsation (complexe) ω est fixée à partir des quatre

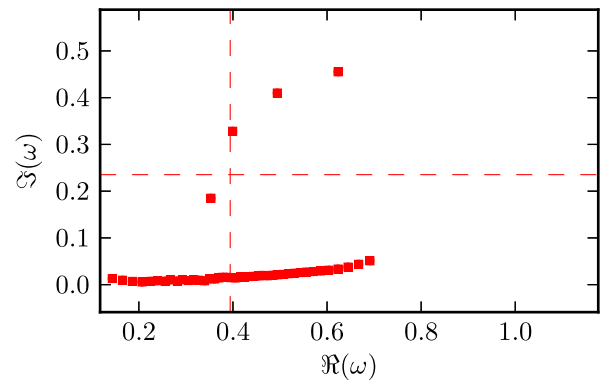


FIGURE 2 – Spectre obtenu pour $\sigma = 0.39 + 0.24i$. Les cercles correspondent à l'ensemble des valeurs propres obtenues et les carrés pleins sont les modes retenus après filtrage. La valeur de la cible est repérée par les pointillés.

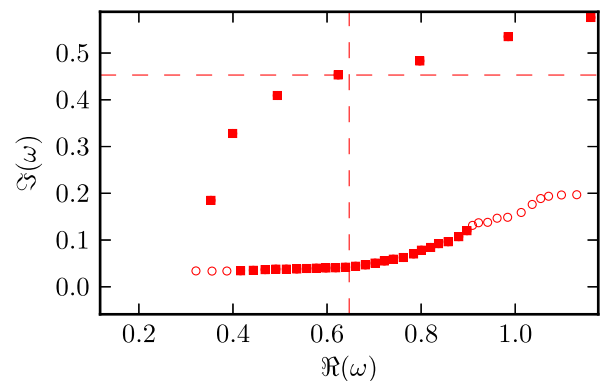


FIGURE 3 – Spectre obtenu pour $\sigma = 0.64 + 0.45i$. Les cercles correspondent à l'ensemble des valeurs propres obtenues et les carrés pleins sont les modes retenus après filtrage. La valeur de la cible est repérée par les pointillés.

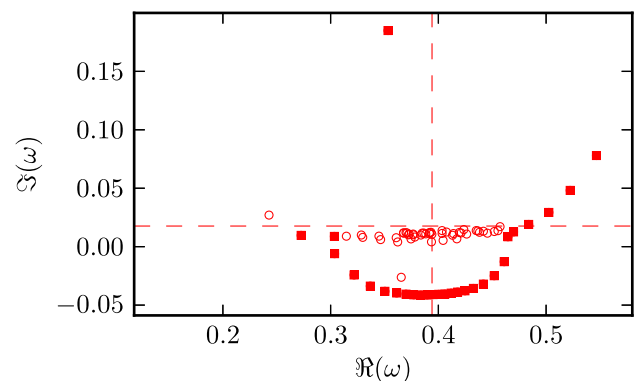


FIGURE 4 – Spectre obtenu pour $\sigma = 0.39 + 0.02i$. Les cercles correspondent à l'ensemble des valeurs propres obtenues et les carrés pleins sont les modes retenus après filtrage. La valeur de la cible est repérée par les pointillés.

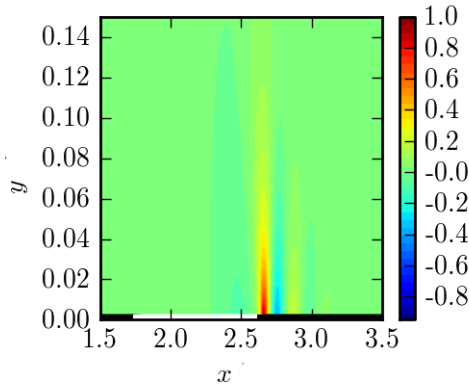


FIGURE 5 – Partie réelle du champ de pression acoustique associé à la valeur propre $\omega = 0.35 + 0.18i$. Les parois rigides sont représentées en noir et le liner en blanc.

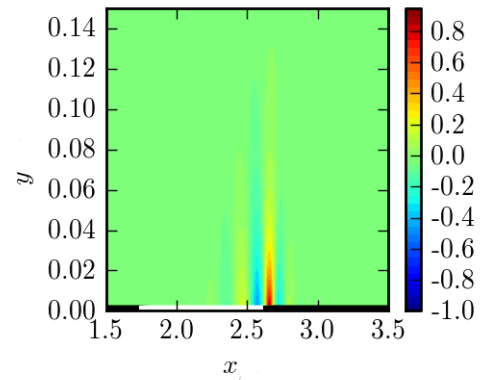


FIGURE 6 – Partie réelle du champ de pression acoustique associé à la valeur propre $\omega = 0.62 + 0.46i$. Les parois rigides sont représentées en noir et le liner en blanc.

valeurs propres visibles figure 2. L'erreur sur le module de l'impédance est respectivement de 14,9%, 15,4%, 15,5% et 15,5% en considérant ces quatre pulsations par parties réelles croissantes.

- les effets bidimensionnels impossibles à capter par la stabilité locale. L'étude de stabilité locale [8] a donné un mode instable de longueur d'onde $\lambda = \Re(2\pi/k) = 0.65$ ce qui correspond approximativement à $0.7L$. On peut ainsi se demander si l'instabilité absolue obtenue par stabilité locale n'est pas retrouvée du fait du caractère réduit du liner. En outre, les résultats obtenus laissent aussi penser que la dynamique instable de type résonateur observée peut être due aux effets bidimensionnels liés aux ruptures d'impédances et qu'ainsi tous les modes observés ne sont pas forcément liés à l'existence d'une région absolument instable (ce qui est pourtant souvent à l'origine d'une dynamique instable de type résonateur [3]).

Comme observé figure 1, il est remarquable que les quatre modes propres instables obtenues par analyse de stabilité globale ont des pulsations propres menant à des valeurs de la réactance $\Im(Z)$ proche de zéro (0.03, -0.02, -0.04 et -0.03 en prenant les valeurs propres par parties réelles croissantes). Ce résultat est à mettre en parallèle avec les nombreuses analyses de stabilité locale ayant montré l'existence d'une onde hydrodynamique convectivement instable lors d'une excitation à une fréquence proche de la fréquence de résonance du liner.

4.3 Fonctions propres

Les quatre valeurs propres isolées visibles figure 2 sont associées à des fonctions propres n'existant qu'au voisinage de la rupture d'impédance avale. À titre d'exemple nous traçons dans cette région de l'espace les champs de pression acoustique associés aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ et $\omega = 0.62 + 0.46i$ sur les figures 5 et 6. De façon générale, les résultats sur les fonctions propres étant comparables pour les quatre modes instables obtenus par analyse de stabilité globale, nous ne tracerons ici que les résultats correspondant aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ et $\omega = 0.62 + 0.46i$.

Les fonctions propres font apparaître principalement un pic au niveau de la rupture d'impédance avale, pic

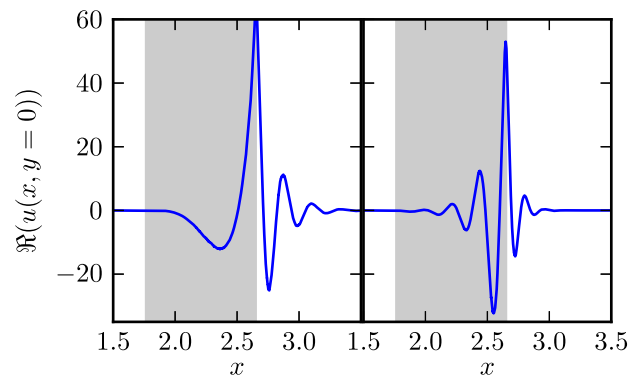


FIGURE 7 – $\Re(u(x, y = 0))$ pour les fonctions propres associées aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ (à gauche) et $\omega = 0.62 + 0.46i$ (à droite). La partie grisée correspond au liner.

précédé et suivi respectivement d'une amplification et d'un amortissement rapides. Les fonctions propres n'existant qu'au voisinage du liner, nous nous intéressons en particulier à l'évolution des fonctions propres le long de la paroi inférieure. Sur les figures 7, 8 et 9 sont tracées les parties réelles de u , v et p des fonctions propres associées aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ et $\omega = 0.62 + 0.46i$ sur la paroi inférieure.

À la rupture d'impédance est observée comme attendu [7] une discontinuité de la vitesse normale à la paroi v ainsi qu'un pic sur la vitesse tangentielle à la paroi u . Il est remarquable d'observer de tels pics également sur v et p au voisinage de la rupture d'impédance. Les résultats obtenus pour $\omega = 0.62 + 0.46i$ sont qualitativement comparables à ceux obtenus pour $\omega = 0.35 + 0.18i$ avec une longueur d'onde plus courte du fait de la fréquence plus élevée.

Nous observons, figures 7, 8 et 9, des amplifications sur le liner de type e^{ikx} . En revanche, l'amplification au niveau de la rupture d'impédance semble être plus forte que ce comportement exponentiel. Le «comportement 1D» (calculable par stabilité locale) est ainsi dominé par les effets bidimensionnels liés à la taille finie du liner. Comme avancé lors de l'étude des spectres en section 4.2, la dynamique instable de type résonateur semble être provoquée par les discontinuités d'impédance et n'est donc *a priori* pas purement liée à la présence d'une région

absolument instable.

5 Conclusion et perspectives

Cet article s'est intéressé à l'application de la théorie de stabilité globale à l'étude d'instabilités hydrodynamiques pouvant se développer sur un liner dans une configuration proche de celle étudiée dans la référence [8] montrant l'existence d'une instabilité absolue par analyse de stabilité locale. La résolution du problème aux valeurs propres visant à déterminer les pulsations propres du problème a été grandement simplifiée par l'utilisation d'une méthode permettant l'écriture de ce problème aux valeurs propres sous une forme linéaire bien que le modèle d'impédance considéré soit non linéaire vis-à-vis de la pulsation.

L'analyse de stabilité globale a montré l'existence d'au moins quatre modes temporellement instables. Ces quatre modes sont associés à des pulsations propres pour lesquelles la réactance du liner est quasi-nulle. De plus, si ces modes suivent bien une amplification exponentielle sur le liner, leurs amplitudes maximales sont en revanche liées à une forte amplification au niveau de la rupture d'impédance avale. Ce résultat semble montrer que la dynamique de type résonateur observée n'est pas simplement due à l'existence d'une région absolument instable.

Les résultats présentés dans cet article n'ont pas permis de retrouver précisément les résultats de stabilité locale [8]. Deux explications ont alors été avancées : d'une part la taille réduite du liner et d'autre part la loi d'impédance implantée dans le code de stabilité globale qui diffère de la loi d'impédance utilisée en stabilité locale. On peut notamment se demander si l'ensemble des modes obtenus sont uniquement dus à des effets bidimensionnels ou si un (ou plusieurs) d'entre eux est lié à l'existence en stabilité locale d'une instabilité absolue et serait retrouver en stabilité globale en prenant un liner de taille de plus en plus élevée et une loi d'impédance se rapprochant de plus en plus de la loi utilisée dans la référence [8].

Il est ainsi envisager d'effectuer de nouvelles analyses de stabilité globale en prenant différentes tailles de liner ainsi qu'un modèle d'impédance se rapprochant plus de eq. (3). De plus, une étude fine du comportement de la perturbation acoustique au niveau des ruptures d'impédance est nécessaire pour comprendre, le cas échéant, comment la dynamique de type résonateur est créée par les effets bidimensionnels.

Références

- [1] F.Q. Hu, «A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow». *Journal of Computational Physics* **208**(2), 469-492 (2005).
- [2] L. Sbardella, B.J. Tester et M. Imregun, «A time-domain method for the prediction of sound attenuation in lined ducts». *Journal of Sound And Vibration* **239**(3), 379-396 (2001).
- [3] O. Marquet, D. Sipp, J.-M. Chomaz et L. Jacquin, «Amplifier and resonator dynamics of a low-Reynolds-number recirculation bubble in a global framework». *Journal of Fluid Mechanics* **605**, 429-443 (2008).

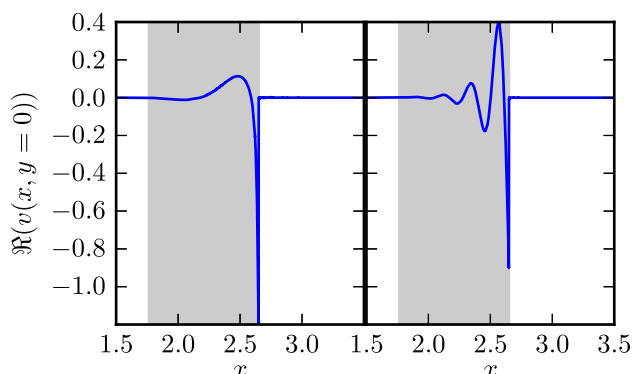


FIGURE 8 – $\Re(v(x, y = 0))$ pour les fonctions propres associées aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ (à gauche) et $\omega = 0.62 + 0.46i$ (à droite). La partie grisée correspond au liner.

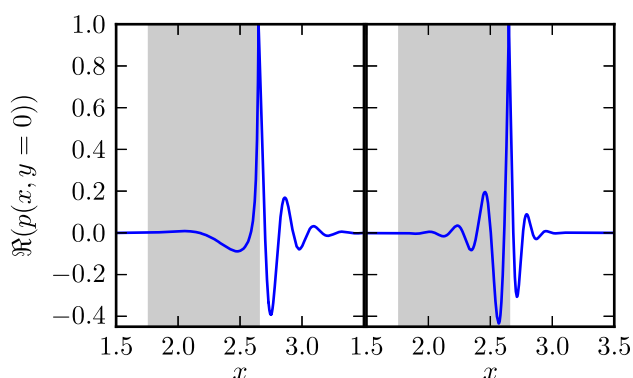


FIGURE 9 – $\Re(p(x, y = 0))$ pour les fonctions propres associées aux valeurs propres $\omega = 0.35 + 0.18i$ (à gauche) et $\omega = 0.62 + 0.46i$ (à droite). La partie grisée correspond au liner.

- [4] S. Shi, C. Chen et D. Prather, «Band structure calculation of photonic crystal slab by using plane wave expansion method with perfectly matched layers». *Integrated Optoelectronic Devices 2004*, International Society for Optics and Photonics 62-68.
- [5] S.W. Rienstra et D. Mirela, «Boundary-layer thickness effects of the hydrodynamic instability along an impedance wall». *Journal of Fluid Mechanics* **671**, 559-573 (2011).
- [6] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret et Y. Ventribout, «Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method». *Comptes Rendus Mécanique* **333**, 676-682 (2005).
- [7] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis, «Discontinuous Galerkin method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices». *Journal of Sound And Vibration* **332**, 3270-3288 (2013).
- [8] D. Marx et Y. Aurégan, «Effect of turbulent eddy viscosity on the unstable surface mode above an acoustic liner». *Journal of Sound And Vibration* **329**(18), 3798-3812 (2013).
- [9] W.C. Reynolds et W.G. Tiederman, «Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory». *Journal of Fluid Mechanics* **27**(2), 253-272 (1967).