



## **Une méthode de calcul semi-analytique pour l'évaluation de la densité du potentiel double couche**

T. Nicolas

USJ-ESIB, CST Mar Roukoz, Mkallès, 11-514 Beyrouth, Liban  
tony.nicolas@usj.edu.lb

Dans cet article, nous proposons une méthode de calcul semi-analytique pour évaluer la densité du potentiel double couche lors de la résolution, par la méthode des éléments finis de frontière d'un problème de rayonnement d'une plaque vibrante immergée dans un fluide homogène au repos. Dans un premier temps, nous proposons la formulation du problème, ensuite la forme intégrale obtenue en utilisant la méthode des éléments finis de frontière. Nous présentons la singularité. Ensuite nous proposons une méthode basée sur une combinaison judicieuse du calcul formel et du calcul numérique permettant de lever cette singularité. Nous présentons l'application de la méthode dans le cadre d'un maillage rectangulaire régulier. Nous terminons par la présentation d'un ensemble de résultats obtenus.

## 1 Introduction

Dans des précédents articles [1,2], nous avons proposé le concept d'une couche anéchoïque multicellulaire linéaire. Cette couche, basée sur une architecture informatique dédiée, couvrira une surface donnée et son animation par un algorithme adéquat rendra cette dernière anéchoïque pour les ondes planes incidentes.

Dans la suite nous rappelons la formulation du problème du rayonnement d'un objet immergé dans un fluide homogène au repos, nous donnons la formulation de la solution en présentant la singularité. Nous proposons ensuite la formulation variationnelle du problème. Ce qui va nous ramener à l'évaluation d'une nouvelle singularité. Nous classifions les types de singularités à évaluer. Nous proposons pour chaque type de singularité une méthode semi-analytique qui permet de la résoudre. Nous terminons par une présentation des solutions trouvées pour des éléments de maillage quadratique.

## 2 Problème de rayonnement d'une plaque mince

Considérons un objet  $O$  (Figure 1) immergé dans un fluide homogène au repos. Sa paroi est animée d'un mouvement donné. On cherche à évaluer, dans l'espace  $\Omega$  ainsi que sur  $\partial\Omega$  le champ de pression rayonné.

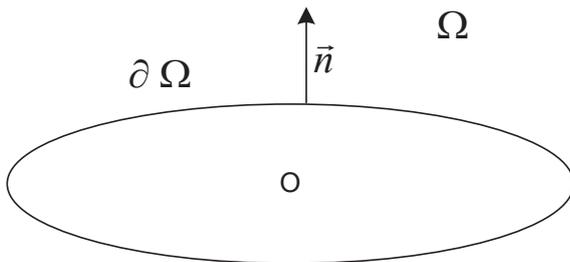


Figure 1 : Objet  $O$  de frontière  $\partial\Omega$  immergé dans un fluide infini

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

Où  $g$  est une fonction connue,  $k$  le nombre d'onde. Au système précédent il convient de rajouter la condition de rayonnement de Sommerfeld qu'on peut écrire sous la forme :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial n} - ikp \right) = 0 \quad (2)$$

La plaque mince relative à l'objet s'obtient en faisant tendre son épaisseur vers 0 [2]. Le calcul de la pression se base [1,2,3] sur l'étude de la discontinuité de l'opérateur laplacien, au sens des distributions, à la traversé de  $\partial\Omega$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ p(x) = \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS(y) \end{array} \right. \quad (3)$$

Où  $\sigma(y)$  présente le saut de la pression à travers  $\partial\Omega$ . Le noyau de Green est donné par :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow G(x,y) = \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \quad (4)$$

Le calcul de la valeur de  $\sigma$  sur  $\partial\Omega$  doit se faire à partir de la seule information en notre possession. La valeur de la dérivée normale de  $p$  sur  $\partial\Omega$ . D'où en calculant :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{grad}_x \left( \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS(y) \right) \cdot n \quad (5)$$

Cette limite sous la réserve de son existence est appelée partie finie de Hadamard et notée indifféremment :

$$\oint_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) = \text{P.F.} \left( \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) \right)$$

Le problème à résoudre est alors :

$$\oint_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) = g(x) \quad (6)$$

L'opérateur  $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y}$  croît en  $\frac{1}{\|x-y\|^3}$  lorsque  $x$  tend vers  $y$ . Donc l'équation (6) doit être interprétée au sens des distributions en lui donnant une formulation variationnelle[3].

## 3 Présentation de la singularité

On considère dans la suite, la plaque dans le plan  $x_0y$  et  $e_3$  suivant  $oz$ . Alors en posant :

$$G_h(x,y) = G(x + he_3, y)$$

L'équation (5) peut s'écrire sous la forme :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G_h(x,y)}{\partial x_3 \partial y_3} dS(y) = g(x) \quad (7)$$

Dont on cherche une solution nulle sur le bord de  $\partial\Omega$  [3]. On considère alors la forme bilinéaire :

$$\left\{ A(\sigma, \tau) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \iint_{\substack{y \in \partial\Omega \\ x \in \partial\Omega}} \sigma(y) \tau(x) \frac{\partial^2 G_h(x, y)}{\partial x_{x3} \partial y_{y3}} dS(y) \right\} \quad (8)$$

Qui s'expriment finalement [3] sous la forme :

$$\left\{ \iint_{\substack{(x,y) \\ \in \partial\Omega_x \partial\Omega}} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y_1}(y) \frac{\partial \tau}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial y_2}(y) \frac{\partial \tau}{\partial x_2}(x) \right) G(x, y) - (k^2 \sigma(y) \tau(x) G(x, y)) dS(y) dS(x) \right\} \quad (9)$$

Posons

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{x \in \partial\Omega} g(x) \tau(x) dS(x)$$

Le problème consiste alors à trouver  $\sigma$  telque [3] :

$$A(\sigma, \tau) = \langle \sigma, \tau \rangle \quad (10)$$

L'évaluation de l'opérateur  $A(\sigma, \tau)$  présente une singularité "apparente" lié au noyau de Green quand la distance  $\|x - y\|$  tend vers 0.

## 4 Traitements des singularités

Pour résoudre l'équation (10), nous proposons une méthode de type éléments finis [5]. Nous considérons une plaque carrée, et un maillage régulier réalisé par des éléments quadrilatères carrés à 4 nœuds de continuité  $C^0$ .

La discrétisation de la formulation variationnelle pose un problème d'ordre numérique, il s'agit de l'évaluation du noyau singulier en  $\frac{1}{\|x-y\|}$  quand les points  $x$  et  $y$  appartiennent au même élément de discrétisation ou bien à des éléments d'intersection non vide. Un calcul numérique en utilisant les points de Gauss permet d'évaluer les contributions des éléments éloignés.

### 4.1 Algorithme standard de résolution

Si on considère acquise les contributions des éléments d'intersection non vide. L'équation (10) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{\alpha\} = [F]\{s\} \quad (11)$$

Où  $[K]$  est la matrice élémentaire construite par l'assemblage des matrices élémentaires.  $[F]$  désigne la matrice des sollicitations et  $s$  les valeurs nodales de ces sollicitations. L'algorithme de construction s'écrit :

$$[K]\{\alpha\} = [F]\{s\} \quad (12)$$

Où  $[K]$  est la matrice élémentaire construite par l'assemblage des matrices élémentaires.  $[F]$  désigne la matrice des sollicitations et  $s$  les valeurs nodales de ces sollicitations. L'algorithme de construction s'écrit :

```
Initialiser les matrices [K] et [F] à zéro
Pour m parcourant [1..NbElement] faire
  Chercher les nœuds de  $El_m$ 
  Ajouter la contribution de  $El_m$  à [F]
  Pour n parcourant [1..NbElement] faire
    Chercher les nœuds de  $El_n$ 
    Ajouter la contribution de la matrice
    Élémentaire  $[K]_{m,n}$  à [K]
  Fin Pour
Fin Pour
```

Où les matrices élémentaires  $[K]_{m,n}$  sont des matrices carrées de dimensions  $4 \times 4$ , ces matrices sont construites pour un couple d'éléments ( $El_m, El_n$ ) par la formule suivante

(12), dans laquelle  $\varphi_p$  représente la fonction test sur le nœud  $p$  de l'élément, l'intégration se fait par rapport à  $x$  et  $y$  pour  $x \in El_m, y \in El_n$  :

$$[K]_{m,n} \rightarrow \quad (13)$$

$$\left( \begin{array}{c} \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial \varphi_p(y)}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi_q(x)}{\partial x_1} e^{ik\|x-y\|} \\ + \\ \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial \varphi_p(y)}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_q(x)}{\partial x_2} e^{ik\|x-y\|} \\ - \\ \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} k^2 \varphi_p(y) \varphi_q(x) e^{ik\|x-y\|} \end{array} \right)$$

### 4.2 Classifications des singularités

Considérons le cas des éléments voisins. Les points d'intersections de ses éléments sont des singularités fortes pour l'intégration numérique directe des matrices élémentaires correspondantes. En effet, chaque point d'intersection présente une division par zéro de l'intégrande et par conséquent une indétermination de l'intégrale. La solution est donc d'utiliser une méthode semi-analytique pour évaluer le noyau singulier présent dans les matrices élémentaires des éléments voisins. Plusieurs auteurs ont suivi cette voie [3,4,5], en intégrant manuellement la singularité que représente  $1/r$  où  $r$  est la distance entre deux points pris dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous proposons une approche complémentaire, basée sur l'utilisation de la puissance du calcul formel pour réaliser, non seulement l'intégration des singularités en  $1/r$ , mais pour l'évaluation numérique complète des matrices élémentaires des éléments voisins.

Considérons deux éléments ayant une intersection non vide (figure 2).

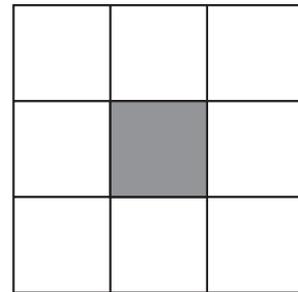


Figure 2 : Divers positions de deux éléments d'intersection non vide

Nous classons les intersections en 3 catégories :

- Éléments confondus.
- Éléments connectés par un côté.
- Éléments connectés par un sommet.

Pour lever les singularités "apparentes" des intégrales nous procédons de la façon suivante : Nous nous plaçons

dans l'espace de référence. Ensuite, nous fixons, formellement, un point  $(\zeta, \eta)$  dans le premier élément de référence qui devient l'origine,  $(\zeta', \eta')$  se balade dans le second élément. Nous effectuons, formellement, le changement de variable suivant dans les formules (13) :

$$\begin{aligned}\zeta' - \zeta &= r \cos(\theta) \\ \eta' - \eta &= r \sin(\theta)\end{aligned}\quad (14)$$

Le fait d'avoir fixé  $(\zeta, \eta)$ , permet de déterminer les domaines de variations de  $r$  et de  $\theta$  en fonction de  $(\zeta, \eta)$ . Ensuite, nous intégrons analytiquement par rapport à  $r$  et  $\theta$  les différents termes de la formule (12). (Rappelons qu'au numérateur nous avons des fonctions polynomiales en  $(\zeta', \eta')$ ). Cette première intégration permet d'absorber la singularité apparente en  $1/r$  et donne une fonction en  $(\zeta, \eta)$ . Le résultat final s'obtient par intégration numérique de cette fonction par la méthode produit des points de Gauss, dans un espace de dimension 2.

Nous présentons dans la suite les différents domaines de variations de  $r$  et de  $\theta$  en fonction de la position relative des éléments.

### 4.3 Eléments confondus

Considérons deux éléments confondus  $El$  et  $El'$ . Soit  $(\zeta, \eta) \in El$  et  $(\zeta', \eta') \in El'$ . Dans les espaces des références, nous avons :

$$\begin{aligned}-1 \leq \zeta \leq 1 & ; \quad -1 \leq \eta \leq 1 \\ -1 \leq \zeta' \leq 1 & ; \quad -1 \leq \eta' \leq 1\end{aligned}$$

Pour un  $(\zeta, \eta)$  donné, le domaine de variation de  $(\zeta', \eta')$  est (figure 3):

$$\begin{aligned}-1 - \zeta \leq \zeta' \leq 1 - \zeta \\ -1 - \eta \leq \eta' \leq 1 - \eta\end{aligned}$$

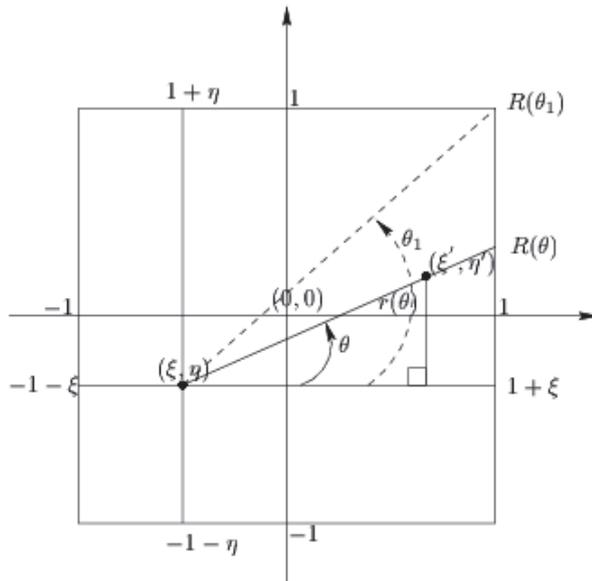


Figure 3 : Domaine de variations de  $\zeta'$  et  $\eta'$

Nous décomposons ensuite le carré en 8 zones (figure 4).

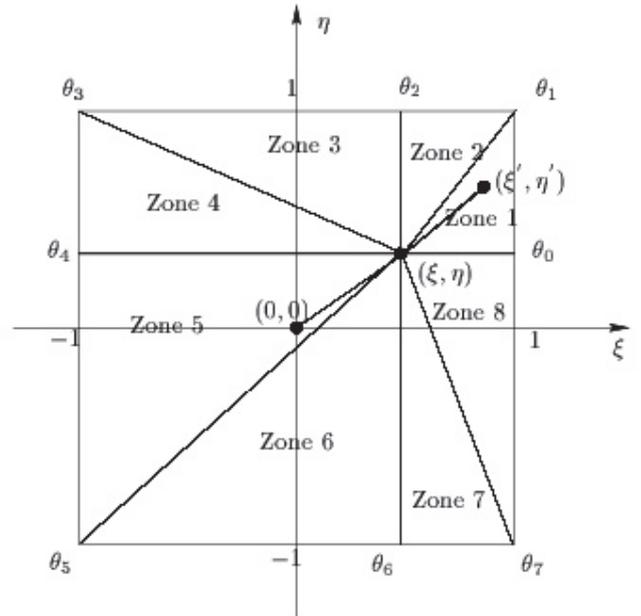


Figure 4 : Définition de 8 zones dans deux éléments confondus

Pour tout point  $(\zeta', \eta')$  nous effectuons le changement de variables en polaire (Tableau 1) :

Tableau 1: Différents domaines suivant les zones

$(\zeta', \eta')$	$r$	$\theta$
	$0 \leq r(\theta) \leq R(\theta)$	$\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$
Zone 1	$R(\theta) = \frac{1-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_0 = 0$ $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(1-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}$
Zone 2	$R(\theta) = \frac{1-\zeta}{\sin(\theta)}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$
Zone 3	$R(\theta) = \frac{1-\zeta}{\sin(\theta)}$	$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1-\eta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(-1-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}$
Zone 4	$R(\theta) = \frac{-1-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_4 = \pi$
Zone 5	$R(\theta) = \frac{-1-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_5 = \pi + \cos^{-1}\left(\frac{-1-\zeta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(-1-\zeta)^2 + (-1-\eta)^2}$

Zone 6	$\frac{R(\theta)}{-1-\eta} = \frac{1}{\sin(\theta)}$	$\theta_6 = \frac{3\pi}{2}$
Zone 7	$\frac{R(\theta)}{-1-\eta} = \frac{1}{\sin(\theta)}$	$\theta_7 = \frac{3\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{1-\eta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(1-\zeta)^2 + (-1-\eta)^2}$
Zone 8	$\frac{R(\theta)}{1-\zeta} = \frac{1}{\cos(\theta)}$	$\theta_7 = 2\pi$

Pour chaque zone nous utilisons le changement de variable (13), nous intégrons analytiquement par rapport à  $e$  et  $\theta$ . Nous obtenons des fonctions dépendantes de  $(\zeta, \eta)$  que nous intégrons ensuite numériquement par la méthode de point de Gauss dans un espace de dimensions 2.

Ce traitement a été réalisé grâce à un mini logiciel de calcul formel développé sous Mathematica.

#### 4.4 Éléments connectés par un côté

Considérons deux éléments connectés par un côté. Nous pouvons effectuer directement des calculs numériques pour ce type d'éléments. En effet, la division par la distance présente une singularité uniquement le long de la frontière commune. En utilisant des points de Gauss situés à l'intérieur de chacun des carrés nous évitons des distances nulles. Cependant, nous adoptons la méthode semi-analytique qui nous assurera une intégration plus précise.

Nous distinguons lors de l'évaluation des intégrales 4 cas possibles, correspondant aux divers positions relatives des deux carrés en question (Figure 2). Le principe d'évaluation est le même, nous développons dans la suite un seul cas. Considérons les deux éléments  $El$  et  $El'$  (Figure 4), nous effectuons un changement de variables sur  $(\zeta', \eta')$  de telle sorte que les domaines de  $(\zeta, \eta)$  et  $(\zeta', \eta')$  soient les suivants :

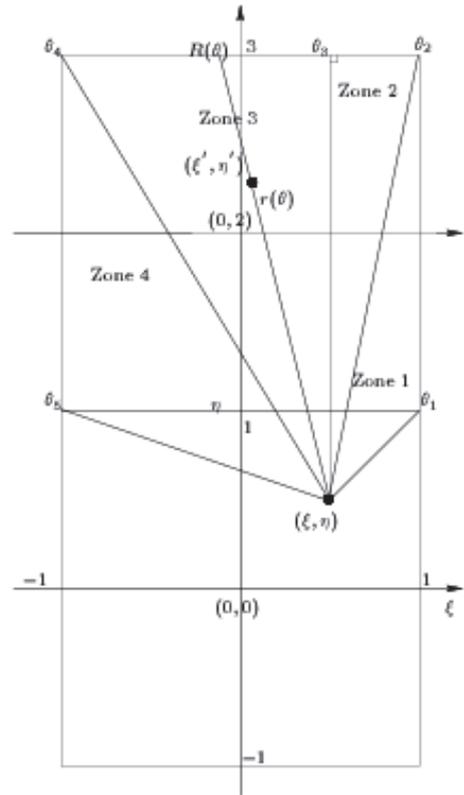


Figure 5 : Définition des zones pour deux éléments connectés par un côté

$$\begin{aligned} -1 \leq \zeta \leq 1 & ; -1 \leq \eta \leq 1 \\ -1 \leq \zeta' \leq 1 & ; 1 \leq \eta' \leq 3 \end{aligned}$$

En fixant le point  $(\zeta, \eta)$ , nous pouvons définir 4 zones dans lesquelles  $(\zeta', \eta')$  peut varier. Le changement de variables (13) est alors effectué. Ainsi les domaines de variations de  $r$  et de  $\theta$  dépendent de la zone à laquelle appartient le point  $(\zeta', \eta')$ . Le tableau 2 présente les diverses informations concernant cette démarche.

Tableau 2: Différents domaines suivant les zones

$(\zeta', \eta')$	$r$	$\theta$
	$R_1(\theta) \leq r(\theta) \leq R_2(\theta)$	$\theta_i \leq \theta \leq \theta_i + 1$
Zone 1	$R_1(\theta) = \frac{1-\eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{1-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(1-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}$ $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(1-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}$

<i>Zone 2</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3 - \eta}{\cos(\theta)}$	$\theta_3 = \frac{\pi}{2}$
<i>Zone 3</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3 - \eta}{\sin(\theta)}$	$\theta_4 = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{3 - \eta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(-1 - \zeta)^2 + (3 - \eta)^2}$
<i>Zone 4</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{-1 - \zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_5 = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{3 - \eta}{d}\right)$ $d = \sqrt{(-1 - \zeta)^2 + (1 - \eta)^2}$

### 4.5 Eléments connectés par un sommet

Dans le cas d'éléments connectés par un sommet, nous développerons dans la suite le cas de la figure (6) les autres cas sont calculés par symétrie où en effectuant la même démarche.

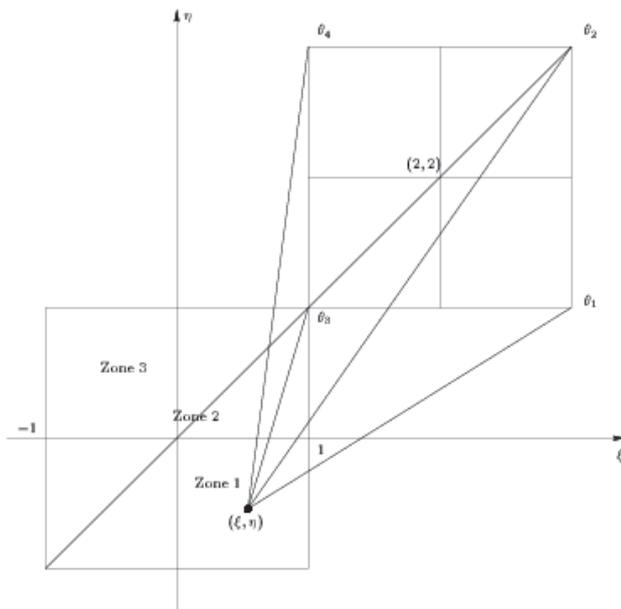


Figure 6 : Une des positions de deux éléments connectés par un côté.

Les domaines de variations sont :

$$-1 \leq \zeta \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

$$-1 \leq \zeta' \leq 3 \quad ; \quad 1 \leq \eta' \leq 3$$

Fixons un point  $(\zeta, \eta)$ , nous définissons dans le premier élément *El* trois zones de variations de  $(\zeta, \eta)$  voir figure 6 :

<i>Zone 1</i> $(\zeta, \eta)$	$\zeta > \eta$
<i>Zone 2</i> $(\zeta, \eta)$	$\zeta = \eta$
<i>Zone 3</i> $(\zeta, \eta)$	$\zeta < \eta$

Pour chaque point  $(\zeta, \eta)$ , appartenant à l'une de ces zones, nous définissons les zones de variations de  $(\zeta', \eta')$ .

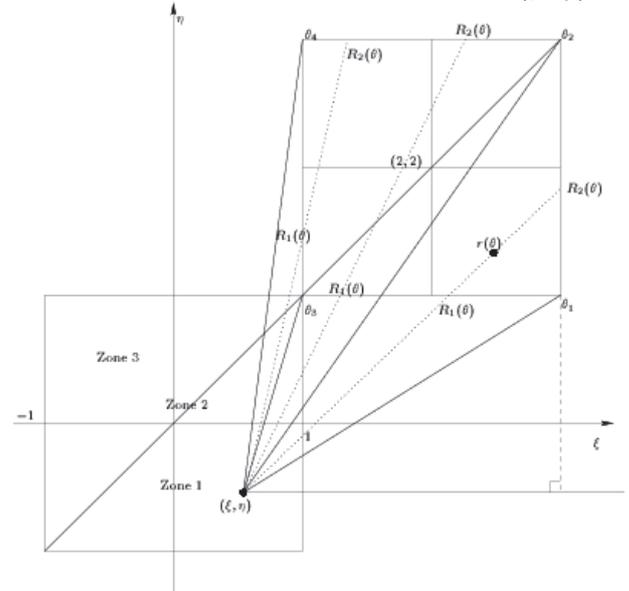


Figure 7 : Le point  $(\zeta, \eta)$  appartient à la première zone.

Le changement de variable (13) nous donne le domaine de variations de  $r$  et de  $\theta$  en fonction de la position de  $(\zeta, \eta)$ . Ainsi pour la zone 1 de  $(\zeta, \eta)$ , on a :

Zone de $(\zeta', \eta')$	$r$ $R_1(\theta) \leq r(\theta) \leq R_2(\theta)$	$\theta$
<i>Zone 1</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3 - \zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{11} \leq \theta \leq \theta_{21}$
<i>Zone 2</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3 - \eta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{12} \leq \theta \leq \theta_{13}$
<i>Zone 3</i>	$R_1(\theta) = \frac{1 - \zeta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3 - \eta}{\sin(\theta)}$	$\theta_{13} \leq \theta \leq \theta_{14}$

Pour la zone 2, on a :

Zone de $(\zeta', \eta')$	$r$ $R_1(\theta) \leq r(\theta) \leq R_2(\theta)$	$\theta$
<i>Zone 2</i>		

<i>Zone 1</i>	$R_1(\theta) = \frac{1-\eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{21} \leq \theta \leq \theta_{22}$
<i>Zone 2</i>	$R_1(\theta) = \frac{1-\zeta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3-\eta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{22} \leq \theta \leq \theta_{23}$

Pour la zone 3, on a :

Zone de ( $\zeta', \eta'$ )	$r$ $R_1(\theta) \leq r(\theta) \leq R_2(\theta)$	$\theta$
<i>Zone 1</i>	$R_1(\theta) = \frac{1-\eta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{31} \leq \theta \leq \theta_{32}$
<i>Zone 2</i>	$R_1(\theta) = \frac{1-\zeta}{\sin(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3-\zeta}{\cos(\theta)}$	$\theta_{32} \leq \theta \leq \theta_{33}$
<i>Zone 3</i>	$R_1(\theta) = \frac{1-\zeta}{\cos(\theta)}$ $R_2(\theta) = \frac{3-\eta}{\sin(\theta)}$	$\theta_{33} \leq \theta \leq \theta_{34}$

Où les  $\theta_{ij}, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3,4\}$ . L'indice  $i$  correspond à la zone où se trouve le point  $(\zeta, \eta)$ , l'indice  $j$  définit les divers angles correspondants. Le tableau suivant fournit les différents angles  $\theta_{ij}$  :

$\theta_{11} = \cos^{-1}\left(\frac{3-\zeta}{\sqrt{(3-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{12} = \cos^{-1}\left(\frac{3-\zeta}{\sqrt{(3-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{13} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{14} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{21} = \cos^{-1}\left(\frac{3-\zeta}{\sqrt{(3-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{22} = \frac{\pi}{4}$

$\theta_{23} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{31} = \cos^{-1}\left(\frac{3-\zeta}{\sqrt{(3-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{32} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)^2 + (1-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{33} = \cos^{-1}\left(\frac{3-\zeta}{\sqrt{(3-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}}\right)$
$\theta_{34} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)^2 + (3-\eta)^2}}\right)$

## 5 Conclusion

La validation de cette approche a été effectuée en envoyant une onde plane vers une plaque animée par un mouvement qui assure une réflexion totale de l'onde. Ainsi les ondes devant la plaque présente des nœuds et des ventres de pression et derrière la plaque présente une zone d'ombre [1].

Il nous reste à comparer cette méthode avec d'autres méthodes utilisées pour ce même cas de figure, à effectuer un travail théorique concernant la précision de l'évaluation numérique de l'intégrale résultante.

La généralisation de ce type d'approche semi-analytique à d'autres éléments de références doit être réalisée, sa finalisation devrait nous permettre d'évaluer les intégrales singulières pour tout autre type de surface.

## Références

- [1] Tony Nicolas "Using a boundary element method to validate the concept of an active anechoic multicellular layer" 2012 Annual IOA Meeting and 11<sup>ème</sup> Congrès Français d'acoustiques à Nantes.
- [2] Tony Nicolas "Conception d'une couche anéchoïque multicellulaire linéaire", *actes du 10<sup>ème</sup> congrès Français d'Acoustique, Lyon 2010*.
- [3] M.A. Hamdi Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains. Thèse de doctorat d'état en sciences. Université de Technologie de Compiègne, année 1981.
- [4] M.Guiggiani, A.Gigante. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal Values integrals in the boundary element method. ASME J.Appl. Mech, .57,1990.
- [5] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolphi, F.J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. ASME J.Appl. Mech,.59,1992