



Modèle de la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique bi-dimensionnel

O. Aklouche^a, A. Pelat^b, S. Maugeais^a et F. Gautier^b

^aUniversité du Maine, Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen,
72085 Le Mans, France

^bLAUM, UMR-CNRS 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France
omar.aklouche@univ-lemans.fr

Le trou noir acoustique est un dispositif passif de réduction des vibrations de structures mécaniques. Son principe de fonctionnement se base sur des propriétés spécifiques de propagation des ondes de flexion dans les structures minces telles que les poutres et les plaques ayant une épaisseur variable. Dans une plaque, la réalisation pratique du trou noir acoustique bidimensionnel consiste à poser un revêtement viscoélastique mince sur une cuvette de révolution, où le profil de l'épaisseur de la plaque varie radialement en suivant une loi de puissance. La mise en place de ce traitement n'induit aucune masse ajoutée, ce qui constitue son intérêt principal.

La présence du trou noir dans une plaque constitue une inhomogénéité, et donne lieu à des phénomènes complexes de diffusion. Pour comprendre ces phénomènes, une modélisation analytique consiste à étudier la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique sans revêtement viscoélastique inséré dans une plaque infinie. Le document relate la méthodologie d'obtention du champ diffusé et des propriétés de diffusion telle que la section efficace de diffusion. Cette dernière, définie comme le rapport des flux d'énergie du champ diffusé et du champ incident, est utilisée comme indicateur de visibilité du diffuseur par l'onde incidente. Avec l'analyse des variations de la section efficace de diffusion on prédit l'interaction du trou noir avec l'onde incidente et on met en évidence l'existence de modes piégés, donnant lieu à des maxima locaux pour la section de diffusion.

1 Position du problème

Nous considérons une onde plane, de flexion, en régime harmonique. En notant x la direction de propagation et $k_f = \sqrt[4]{\frac{\rho h_0}{D_0}} \sqrt{\omega}$ le nombre de d'onde de flexion (ρ désignant la masse volumique de la plaque, h_0 l'épaisseur, ω la fréquence circulaire, $D_0 = \frac{E^* h_0^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité de flexion, ν le coefficient de Poisson et $E^* = E_0(1 - i\eta)$ le module de Young complexe du matériau de la plaque, où E_0 et η sont respectivement le module de Young sans pertes et l'angle de pertes du matériau), cette onde donne lieu à un champ vibratoire incident $W_{inc}(x) = e^{ik_f x}$.

On place un trou noir sans revêtement à l'origine du système de coordonnées polaires (r, θ) (Fig.1). Ce trou noir est constitué d'une cuvette de révolution, donnant lieu à une diminution graduelle de l'épaisseur en fonction du rayon, suivant une loi de puissance (Fig.2). On note a le rayon intérieur du trou noir, et b son rayon extérieur. A l'intérieur du trou noir, l'épaisseur présente une variation du type

$$h(r) = \begin{cases} h_0 \left(\frac{r-a'}{b-a'} \right)^m, & a < r < b \\ h_0, & r = b \end{cases} \quad (1)$$

La distance a' représente le point où l'épaisseur de troncature s'annule. En pratique, l'épaisseur de troncature à l'extrémité ne s'annule pas mais est toujours égale à une valeur non nulle, appelée valeur de troncature. Cette valeur correspond à la valeur $h(a)$, où a désigne le rayon du trou noir réalisé en pratique. On a bien sûr $a > a'$.

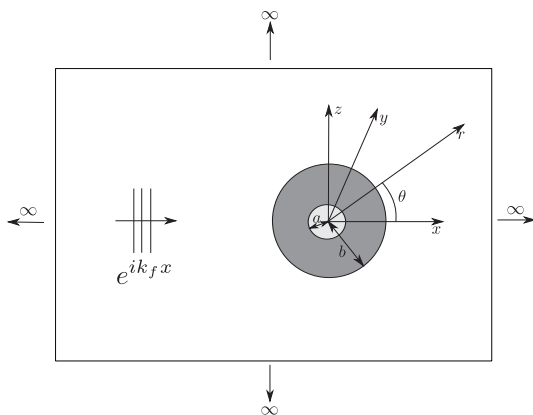


FIGURE 1 – Onde plane incidente sur un trou noir acoustique inséré dans une plaque infinie

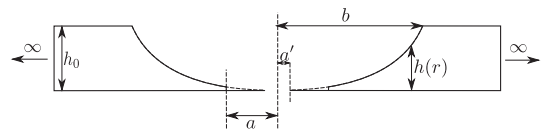


FIGURE 2 – Vue de profil d'une plaque munie d'un trou noir acoustique

2 Mise en équations

L'étude de la plaque contenant le trou noir nécessite la résolution de deux problèmes couplés : le premier concerne la région extérieure au trou noir ($r > b$) où l'épaisseur de la plaque et le nombre d'onde dans le milieu sont uniformes, le second concerne la région inhomogène centrale ($a < r < b$), qui donne lieu à des variations du nombre d'onde avec l'espace.

L'équation générale gouvernant le mouvement de flexion des plaques de Kirchhoff à épaisseur variable est donnée par [6] comme,

$$\rho h(r) \frac{\partial^2 W(r, \theta, t)}{\partial t^2} = (1 - \nu) \diamond^4 \{D(r), W(r, \theta, t)\} - \nabla^2 [D(r) \nabla^2 W(r, \theta, t)] \quad (2)$$

où

$$\diamond^4 \{D(r), W(r, \theta)\} = \frac{\partial^2 D(r)}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial D(r)}{\partial r} \right]. \quad (3)$$

Le champ du déplacement diffusé et le champ du déplacement intérieur sont déterminés à partir des équations du mouvement de chaque milieu (extérieur et intérieur), les conditions aux limites du domaine et les conditions de raccordement entre les régions intérieure et extérieure au trou noir. Ces conditions se traduisent par la continuité du champ, la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant à l'extrémité du trou noir $r = b$, et l'annulation du moment fléchissant et l'effort tranchant à l'extrémité libre du trou noir $r = a$. Ce calcul est mené analytiquement de façon complète en l'absence de revêtement viscoélastique.

2.1 Champ du déplacement extérieur ($r > b$)

L'épaisseur de la plaque est constante à l'extérieur du trou noir ($r > b$). Par conséquent, l'équation (2) se réduit

en régime harmonique à $(\nabla^2 \nabla^2 - k_f^4)W^{ext} = 0$. Le champ du déplacement de la plaque dans la région extérieure est composé des deux parties représentant respectivement l'onde incidente $W_{inc}(\widehat{r}, \theta) = W_0 e^{ik_f \widehat{r} \cos(\theta)}$ et le champ diffusé [7]

$$W_{diff} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k_f \widehat{r}) + B_n K_n(k_f \widehat{r})] \cos(n\theta), \quad (4)$$

avec $\widehat{r} = r - a'$.

En développant l'onde incidente sous forme de série de fonctions de Bessel, le champ du déplacement extérieur s'écrit finalement,

$$W^{ext} = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_f \widehat{r}) \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(k_f \widehat{r}) + B_n K_n(k_f \widehat{r})] \cos(n\theta), \quad (5)$$

où J_n et $H_n^{(1)}$ sont des fonctions de Bessel et de Hankel de première espèce d'ordre n , K_n représente la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre n . Les amplitudes A_n et B_n sont déterminées à partir des conditions de continuité à l'interface milieu intérieur/milieu extérieur et conditions aux limites du domaine.

2.2 Champ du déplacement intérieur ($a < b < r$)

Le mouvement transversal dans le trou noir est décrit par l'équation (2). La solution de cette équation est 2π périodique et peut se développer en série de Fourier $W^{int}(\widehat{r}, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{int}(\widehat{r}) \cos(n\theta)$ en considérant que l'axe x est l'axe de référence pour l'angle θ . En supposant que le trou noir est à profil quadratique ($m = 2$) et en utilisant le changement d'espace $\widehat{r} = r_0 e^{\widehat{z}}$ [3], [8] avec $\widehat{z} = \frac{z}{r_0}$ et $r_0 = b - a'$, la solution analytique de l'équation (2) s'écrit

$$W^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^4 [C_{p,n} e^{ik_{p,n} \widehat{z}}] \right\} \cos(n\theta), \quad k_{p,n} = \frac{K_{p,n}}{ir_0}, \quad (6)$$

où

$$K_{p,n} = -2 \mp \sqrt{7 - 3\nu + n^2 \pm \sqrt{8n^2(3\nu - 1) + 9(1 - \nu)^2 + X}} \quad (7)$$

avec $X = \frac{12\rho\omega^2(1-\nu^2)}{E^* h_0^2 r_0^4}$ et $p = 1, 2, 3$ et 4 .

montrant l'existence de quatre ondes dans le milieu.

3 Résultats numériques

Des exemples de résultats numériques caractérisant le comportement et les propriétés de la diffusion d'une onde de flexion par le trou noir acoustique sans revêtement, sont présentés dans cette section. Ces résultats sont obtenus en considérant un trou noir acoustique de rayon extérieur $b = 6$ cm et de rayon de troncature $a = 5$ mm, inséré dans une plaque d'aluminium d'épaisseur constante $h_0 = 1.5$ mm avec les propriétés physiques : $\rho = 2700$ kg/m³, $E_0 = 70$ GPa, $\nu = 0.33$ et $\eta = 10^{-3}$.

3.1 Courbes de dispersion

La relation de dispersion en équation (7) est tracée en figure 3 en fonction de la fréquence. Ici, que les courbes de dispersion concernant $k_{3,n}$ et $k_{4,n}$ sont présentées. En considérant la convention temporelle $e^{-i\omega t}$, ces courbes montrent qu'il existe deux ondes évanescentes à l'intérieur du trou noir pour $k_{3,n}$ et $k_{4,n}$, qui se transforment en propagatives à partir de la fréquence de coupure f_c , définie par

$$f_c = \frac{h_0}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{E_0 [n^2(n^2 - 30\nu + 22) - 24\nu + 40]}{12\rho(1 - \nu^2)}}. \quad (8)$$

Les ondes concernant $k_{1,n}$ et $k_{2,n}$ (non présentées ici) sont des ondes évanescentes quelle que soit la fréquence.

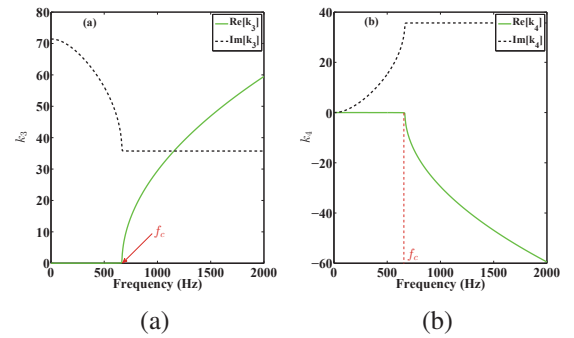


FIGURE 3 – Exemple de courbes de dispersion des ondes de flexion à l'intérieur d'un trou noir acoustique, pour $n = 0$. Parties réelles et parties imaginaires des nombres d'onde k_3 et k_4 sont tracées respectivement sur les figures (a) et (b).

3.2 Propriétés de diffusion

3.2.1 Champ du déplacement

La figure 4 présente le champ du déplacement de la plaque avec trou noir, calculé en prenant en compte les conditions de continuité et conditions aux limites citées dans la section 2. Le champ est tracé pour les deux fréquences $f \approx 4.1$ Hz et $f \approx 1640$ Hz correspondant respectivement pour la plaque choisie aux nombres d'onde de flexion adimensionnels $k_f b = 0.2$ et $k_f b = 4$.

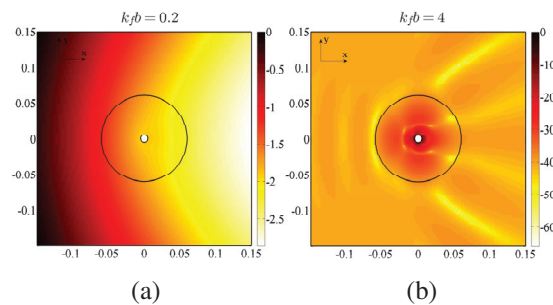


FIGURE 4 – Module du champ du déplacement de la plaque avec trou noir acoustique, calculé pour les fréquences correspondant à $k_f b = 0.2$ (a) et $k_f b = 4$ (b). Le module du champ du déplacement total est normalisé par sa valeur maximale et tracé en dB ($10 \log \left(\frac{|W_{tot}|}{\text{Max}|W_{tot}|} \right)$).

Ces résultats montrent qu'à la fréquence $k_f b = 0.2$, où la longueur d'onde incidente est 5 fois plus grande que le périmètre du diffuseur ($\lambda = 10\pi b$), l'onde ne pénètre pas dans le diffuseur. En augmentant la fréquence ($k_f b = 4$, correspondant à un trou noir qui est 4 fois plus grand que la longueur d'onde incidente), les résonances locales à l'intérieur du trou noir deviennent de plus en plus visibles : lorsque la longueur d'onde incidente est petite devant le périmètre du diffuseur, l'onde pénètre dans le trou noir et donne lieu à une augmentation locale d'amplitude.

3.2.2 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion est classiquement utilisée comme indicateur de visibilité, pour caractériser le phénomène d'interaction d'une onde avec un obstacle : l'obstacle est d'autant plus visible lorsque la section efficace est grande. Sur la figure 5 est tracée cette section pour le trou noir étudié. Le résultat montre que la section efficace de ce trou noir présente des pics de résonances à basses et à hautes fréquences, confirmant que le diffuseur est bien visible par l'onde incidente sur toute la bande fréquentielle étudiée.

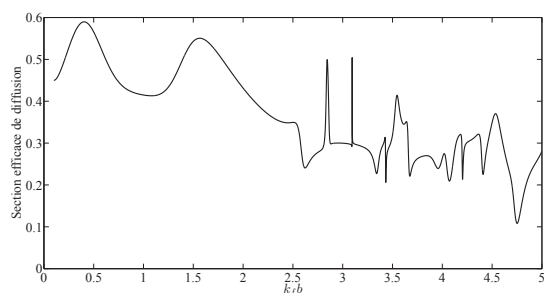


FIGURE 5 – Section efficace de diffusion du trou noir acoustique sans revêtement viscoélastique.

3.2.3 Modes piégés

La présence du trou noir dans la plaque étudiée, peut donner lieu à des phénomènes de résonances locales faisant apparaître des modes vibratoires appelés modes piégés, qui se produisent à des fréquences complexes. Ces modes représentent des oscillations d'énergie finie autour du trou noir [1], [2].

Deux exemples de modes piégés (basse fréquence et haute fréquence) de la plaque avec trou noir sont affichés en figure 6. Ces modes se produisent respectivement à des fréquences voisines aux fréquences correspondant à $k_f b = 0.4$ et $k_f b = 3.43$ pour lesquelles la section efficace de diffusion augmente localement.

Conclusion

Ce document présente des résultats clés de la modélisation analytique de la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique sans revêtement viscoélastique, inséré dans une plaque infinie. Le modèle permet de quantifier la dispersion et étudier le comportement des ondes de flexion à l'intérieur d'un trou noir sans revêtement viscoélastique. L'analyse des variations de la section efficace de diffusion a permis de conclure que le trou noir étudié

est un diffuseur résonant à hautes et à basse fréquences, confirmant qu'il est visible par les courtes et les longues longueurs d'onde incidentes. Les pics de la section efficace sont associés à l'existence des premiers modes piégés du diffuseur élastique que constitue le trou noir.

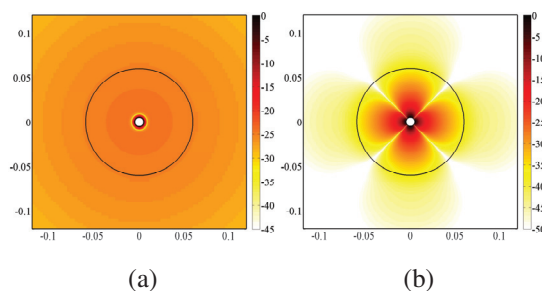


FIGURE 6 – Modes piégés d'une plaque infinie munie d'un trou noir acoustique sans revêtement viscoélastique. (a) mode (0,1) basse fréquence : $k_f b = 0.405 + 0.405i$, (b) mode (2,1) haute fréquence : $k_f b = 3.438 + 0.523i$.

Remerciements

Les auteurs remercient l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT JV) qui finance les travaux de thèse, et remercient également C. PEZERAT, responsable du projet VIBROLEG (VIBroacoustique des structures LEGères).

Références

- [1] M. Callan, C. Linton, and D. Evans. Trapped modes in two-dimensional waveguides. *Journal of Fluid Mechanics*, 229 :51–64, 1991.
- [2] P. Cobelli, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans. Experimental observation of trapped modes in a water wave channel. *EPL (Europhysics Letters)*, 88(2) :20006, 2009.
- [3] H. Conway. Some special solutions for the flexural vibration of discs of varying thickness. *Archive of Applied Mechanics*, 26(6) :408–410, 1958.
- [4] J. Cuenca. *Wave models for the flexural vibrations of thin plates*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2009.
- [5] F. Gautier, J. Cuenca, V. V. Krylov, and L. Simon. Experimental investigation of the acoustic black hole effect for vibration damping in elliptical plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3318, 2008.
- [6] A. Leissa. *Vibration of Plates*. N70-18461. NASA, 1969.
- [7] C. Mow and Y. Pao. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Taylor and Francis Group, 1973.
- [8] D. O'Boy and V. Krylov. Damping of flexural vibrations in circular plates with tapered central holes. *Journal of Sound and Vibration*, 330(10) :2220–2236, 2011.