



Création d'une couche PML axisymétrique appliquée à l'équation de Galbrun en présence d'écoulement

R. Baccouche, M. Ben Tahar et S. Moreau

UTC, Laboratoire Roberval UMR CNRS, Rue Personne de Roberval, 60205 Compiègne, France
ryan.baccouche@utc.fr

Une couche parfaitement adaptée (ou PML pour Perfectly Matched Layer) est étudiée pour les problèmes aéroacoustiques utilisant l'équation de Galbrun en présence d'un écoulement axial et tournant en coordonnées cylindriques. L'équation de Galbrun repose sur l'expression de l'équation d'ondes écrite suivant une description Eulérienne, mais exprimée uniquement en termes de perturbations Lagrangiennes du déplacement. L'équation de Galbrun est résolue par une méthode éléments finis mixte en pression-déplacement. Le modèle éléments finis proposé a déjà fait l'objet d'une validation dans des précédents articles. Il est bien connu qu'en présence d'un écoulement, la couche PML standard peut devenir instable en régime transitoire ce qui a donné lieu à la proposition de formulations plus stables dans la littérature. Un exemple numérique démontrant la validité de la formulation PML proposée est présenté et comparé à un modèle semi-analytique basé sur l'équation de Pridmore-Brown étendue à un écoulement axial et tournant.

1 Introduction

Dans de nombreuses applications aéroacoustiques comme l'étude du bruit généré par un turboréacteur, il n'est pas rare d'être confronté à des problèmes impliquant des domaines physiques infinis. Les méthodes numériques requièrent donc des techniques efficaces et faciles à intégrer afin de tronquer le domaine de calcul sans perturber la solution du problème original. Cette troncature peut s'opérer par l'introduction d'une frontière absorbante représentant l'interface idéale entre le domaine de calcul fini et le domaine tronqué. Cette frontière doit pouvoir simuler les conditions requises de propagation de l'onde vers l'infini sans réflexion vers le domaine de calcul.

La méthode de la couche parfaitement adaptée (ou PML pour Perfectly Matched Layer) est une réponse possible à cette problématique. Elle repose sur la simulation numérique d'une couche absorbante délimitant le domaine de calcul. Cette méthode est qualifiée de "parfaitement adaptée" dans la mesure où l'interface entre le domaine physique et la couche absorbante ne produit pas (du moins en théorie) de réflexions parasites dans le domaine d'intérêt. Bérenger [1] a proposé la première PML afin de simuler une condition d'absorption dans un domaine non borné pour les ondes électromagnétiques. La méthode a depuis trouvé des applications dans divers domaines de l'ingénierie et en particulier en acoustique et en aéroacoustique. L'utilisation de la PML sur les équations d'Helmoltz est maintenant largement répandue [2].

En présence d'écoulement et en régime transitoire, des instabilités peuvent apparaître dans la forme originale de la PML [3, 4]. Ainsi, de nouvelles formulations ont été proposées dans la littérature. Abarbanel [5] étudie l'origine de ces instabilités et propose une transformation appropriée pour le cas des équations d'Euler linéarisées avec écoulement axial uniforme. Hu [6] étudie aussi les causes de ces instabilités pour les équations d'Euler linéarisées et propose une nouvelle formulation de la PML. Il a depuis étendu son travail à un écoulement non uniforme et aux équations d'Euler non linéaires. Diaz [7] propose d'analyser les modèles PML pour les équations d'ondes acoustiques advectives en utilisant la méthode de Cagniard-de Hoop en régime transitoire. Bécache [8] développe une PML pour la formulation régularisée de l'équation de Galbrun harmonique et remarque l'inexistence de ces instabilités en régime harmonique [9, 10].

L'équation de Galbrun peut être vue comme une alternative à l'équation d'Euler linéarisée décrivant exactement les mêmes phénomènes physiques. Néanmoins, son traitement direct par la méthode des éléments finis est source de solutions parasites lorsque sa formulation

n'est basée que sur des variables de déplacements. Une méthode éléments finis mixte en pression-déplacement a alors été proposée afin de remédier à ces solutions parasites [9–11]. Cette approche mixte est générale et très simple à implémenter dans un code éléments finis. Elle a été testée avec succès en régime harmonique et transitoire [12, 13].

Dans ce travail, la méthode PML est appliquée à la formulation variationnelle mixte en pression-déplacement dans un système de coordonnées cylindriques et en présence d'un écoulement axial et tournant. Dans une première partie, la formulation mixte de Galbrun en pression-déplacement est rappelée ainsi que sa résolution par la méthode des éléments finis. Dans une seconde partie, les différents changements de variables conduisant à la création de la PML sont présentés. Leurs influences sur la relation de dispersion de l'onde sont ensuite explicités afin de mieux comprendre les phénomènes d'instabilités qui peuvent survenir. Enfin, un exemple numérique appliqué à un mode inverse est présenté.

2 Formulation variationnelle mixte en pression-déplacement

La propagation des perturbations acoustiques linéaires dans un milieu continu, non visqueux et adiabatique peut être exprimée par une description mixte Eulérienne-Lagrangienne. Cette description consiste à considérer la perturbation Lagrangienne de quantités physiques (associée à la particule fluide) exprimées en termes de variables Eulériennes relative à l'écoulement moyen stationnaire. L'application des règles de perturbation liées à la description mixte sur les équations d'Euler conduit à l'équation de Galbrun [9, 10]

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = 0 \\ p^L = -\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L \end{cases} \quad (1)$$

avec $\frac{d_0}{dt} = -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ la dérivée convective, \mathbf{v}_0 la vitesse de l'écoulement moyen, \mathbf{w}^L la perturbation Lagrangienne du vecteur déplacement de la particule, p^L la perturbation Lagrangienne de la pression en évolution isentropique, p_0 la pression dans l'écoulement moyen et ρ_0 la densité moyenne du fluide. La perturbation Lagrangienne linéaire est définie par:

$$f^L(x_0, t) \equiv f(a, t) - f_0(a, t) \equiv f(x, t) - f_0(x_0, t) \quad (2)$$

où $f(a, t)$ représente la quantité physique dans sa configuration totale (ou perturbée) de la particule a et $f_0(a, t)$

la quantité physique dans sa configuration d'entraînement de la même particule.

Une géométrie axisymétrique est considérée en coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) avec un plan de coupe (r, z) (voir Fig.1). Un écoulement moyen de vitesse $\mathbf{v}_0 = v_{0\theta}(r)\mathbf{e}_\theta + v_{0z}(r)\mathbf{e}_z$ est composé d'un écoulement tournant $v_{0\theta}(r)$ et d'un écoulement axial $v_{0z}(r)$. Toutes les perturbations sont harmoniques avec une dépendance en temps en $e^{-i\omega t}$.

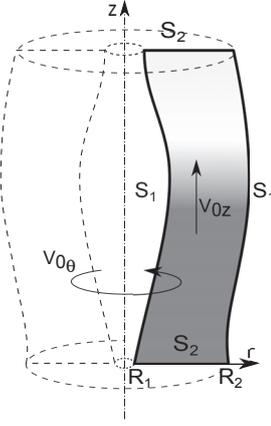


Figure 1: Géométrie d'un conduit annulaire traversé par un écoulement (S_1 se rapporte aux frontières des parois et S_2 à celles du fluide rentrant et du fluide sortant).

L'écoulement moyen ($\mathbf{v}_0, \rho_0, p_0, c_0$) ne dépend que de r . Les quantités physiques perturbées se décomposent sous la forme:

$$(\mathbf{w}^L, p^L)(r, \theta, z, t) = (\mathbf{w}^L, p^L)(r)e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}. \quad (3)$$

Dans un souci de simplification, \mathbf{w}^L et p^L représentent dans la suite uniquement la dépendance radiale des champs. La dérivée matérielle est ainsi donnée par $d_0/dt = -i(\omega - v_{0z}k_z - mv_{0\theta})$ avec m le mode azimutal.

Afin de résoudre l'équation de Galbrun par la méthode des éléments finis, une formulation variationnelle mixte en pression-déplacement est utilisée pour éviter les solutions parasites [9]. Pour cela, les deux équations du système Eq.(1) sont respectivement multipliées par les champs tests \mathbf{w}^* et p^* , et la somme des deux expressions est intégrée sur le domaine acoustique noté Ω_1 .

Deux types de conditions aux limites doivent toutefois être distinguées: celles imposées sur les parois (frontière S_1) et celles imposées dans le fluide (frontière S_2). S_1 peut être une paroi traitée d'impédance Z , ou une paroi rigide ($Z \rightarrow \infty$). En S_2 , un déplacement total est imposé d'où $\mathbf{w}^* = 0$. La formulation variationnelle finale développée en coordonnées

cylindriques est alors donnée par :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p^L + \nabla p^* \cdot \mathbf{w}^L \right. \\ & \quad \left. - \omega^2 \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w}^L \right. \\ & \quad \left. - i\omega \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) + i\omega \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w}^L \right. \\ & \quad \left. - \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^L) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{w}^* \cdot \nabla p_0 (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) - \mathbf{w}^* \cdot (\nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0) \right) r dr d\theta dz \\ & \quad + \int_{S_1} \left(\frac{1}{i\omega Z} p^* p^L \right) dS \\ & = \mathbf{0} \quad \forall (\mathbf{w}^*, p^*). \quad (4) \end{aligned}$$

3 Développement de la PML

Cette partie traite de l'application de la PML sur la formulation mixte de l'équation de Galbrun exprimée en coordonnées cylindriques. L'approche proposée par Hu [6] est adoptée, bien qu'il existe d'autres méthodes dans la littérature [7]. Le cas sans écoulement (formulation classique) n'est pas traité, s'agissant d'un cas particulier de la formulation présentée. L'expression de la PML et de ses opérateurs est détaillée. Dans une seconde partie, les effets des transformations de la PML sur la relation de dispersion sont présentés.

3.1 Les changements de variables de la PML

Comme souligné par de nombreux auteurs [3–5], la PML peut conduire à des instabilités, en présence d'écoulement, pour les équations d'Euler linéarisées en régime transitoire. Ces instabilités sont dues aux modes acoustiques dont la vitesse de phase $\mathbf{v}_{ph} = \omega/k$ et la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = d\omega/dk$ ont des directions opposées (on parle de modes inverses). La PML génère alors des solutions exponentiellement croissantes et l'onde n'est plus absorbée. Par conséquent, $\mathbf{v}_{ph}\mathbf{v}_g$ doit toujours demeurer positif afin d'assurer l'efficacité de la PML. Sans écoulement, cette condition est toujours satisfaite.

Hu [6] propose de pratiquer un changement de repère avant de procéder aux transformations classiques de la PML afin que l'onde acoustique ne soit plus convective dans la couche absorbante. Trois nouvelles variables sont alors introduites:

$$\bar{r} = r \sqrt{1 - M_{m_z}^2}; \quad \bar{z} = z; \quad \bar{t} = t + \alpha z \quad (5)$$

avec $\alpha = \frac{M_{m_z}}{1 - M_{m_z}^2} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k} \right) \frac{1}{c_0}$ où k le nombre d'onde, $M_{m_z} = v_{m_z}/c_0$, v_{m_z} étant la moyenne de la vitesse d'écoulement axial, $\Omega_m = v_{m_\theta}(r_m)/(c_0 r_m)$ avec v_{m_θ} la moyenne de la vitesse d'écoulement tournant et r_m le rayon du conduit [14].

La transformation associée s'écrit:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{Bmatrix}}_Q = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - M_{m_z}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \bar{r} \\ \partial/\partial \bar{z} \\ \partial/\partial \bar{t} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

La seconde étape correspond au changement de variables classique de la PML dans le domaine fréquentiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial\bar{r} \\ \partial/\partial\bar{z} \\ \partial/\partial\bar{t} \end{pmatrix}}_{Q_{pml}} = \begin{pmatrix} 1/\gamma_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{pmatrix}. \quad (7)$$

La dernière étape réécrit les équations dans le domaine spatial et temporel original:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial\bar{r} \\ \partial/\partial\bar{z} \\ \partial/\partial\bar{t} \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-M_{mz}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{pmatrix}. \quad (8)$$

La multiplication des matrices

$$Q_t = Q \cdot Q_{pml} \cdot Q^{-1} \quad (9)$$

aboutit à la transformation totale (en régime harmonique en $e^{-i\omega t}$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ -i\omega \end{pmatrix}}_{Q_t} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\gamma_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_z & \alpha(1-1/\gamma_z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial z \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad (10)$$

dans lequel les coefficients de la PML γ_r et γ_z sont définis de la manière suivante :

$$\gamma_r(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } |r| < r_0 \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_r, & \text{si } |r| \geq r_0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\gamma_z(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } |z| < z_0 \\ 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_z, & \text{si } |z| \geq z_0 \end{cases} \quad (12)$$

avec σ_r et σ_z des coefficients d'absorptions positifs correspondant respectivement à l'axe r et à l'axe z , et $[r_0, z_0]$ définissant la position des interfaces de la PML avec le domaine propagatif (voir Fig.2).

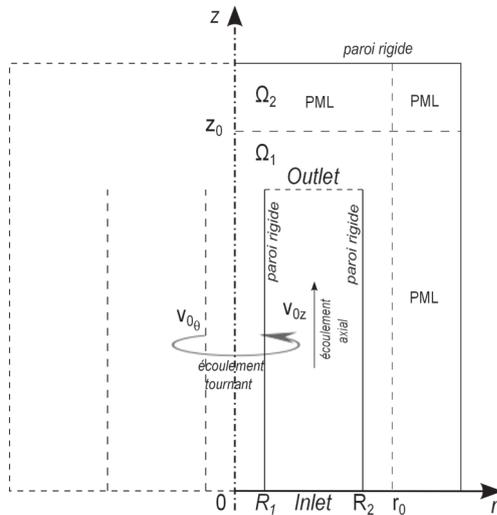


Figure 2: Géométrie d'un conduit annulaire avec parois rigides, en présence d'écoulement et dont le domaine est borné par une couche PML.

La formulation variationnelle associée à la PML est celle de l'Eq.(4) avec une transformation des différents opérateurs:

$$\tilde{\nabla}(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{im}{r} \\ \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} - \alpha^* i\omega \end{pmatrix} (\cdot) \quad (13)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{w}^L = \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{im}{r} w_\theta + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_z}{\partial z} - \alpha^* i\omega w_z \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L = \begin{pmatrix} \left(\frac{im}{r} w_r - \frac{w_\theta}{r} \right) v_{0\theta} + \left(\frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_r}{\partial z} - \alpha^* i\omega w_r \right) v_{0z} \\ \left(\frac{im}{r} w_\theta - \frac{w_r}{r} \right) v_{0\theta} + \left(\frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_\theta}{\partial z} - \alpha^* i\omega w_\theta \right) v_{0z} \\ \left(\frac{im}{r} w_z \right) v_{0\theta} + \left(\frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_z}{\partial z} - \alpha^* i\omega w_z \right) v_{0z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

et

$${}^T \tilde{\nabla} \mathbf{w}^L \cdot \tilde{\nabla} p_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_r^2} \frac{\partial w_r}{\partial r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ \left(\frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial w_r}{\partial z} - \alpha^* i\omega w_r \right) \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (16)$$

avec $\alpha^* = \alpha \left(1 - \frac{1}{\gamma_z} \right)$.

On peut noter que, si les coefficients d'absorptions de la PML sont nuls ($\sigma_r = 0$ et $\sigma_z = 0$), cette formulation PML dégénère vers la formulation variationnelle de Galbrun exprimée Eq.(4). En outre, si $\alpha = 0$, elle correspond à une formulation PML classique.

3.2 Les effets de la PML sur la relation de dispersion

Comme expliqué précédemment, les instabilités de la PML sont dues à la présence de modes inverses. Hu [6] propose d'utiliser le changement de repère présenté Eq.(6) afin d'y remédier. En effet, en présence d'un écoulement axial uniforme et d'un écoulement en bloc rigide ($v_{m\theta}(r_m) = \chi r_m$ d'où $\Omega_m = \chi/c_0$ avec χ coefficient de l'écoulement en bloc rigide), une relation de dispersion analytique simplifiée est trouvée:

$$\left(1 - M_{mz} \frac{k_z}{\omega} c_0 - m \frac{\Omega_m}{k} \right)^2 - \left(\frac{k_r}{\omega} c_0 \right)^2 - \left(\frac{k_z}{\omega} c_0 \right)^2 = 0. \quad (17)$$

Cette relation de dispersion peut être décrite par une ellipse centrée en

$$-\frac{M_{mz}}{1 - M_{mz}^2} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k} \right) \frac{1}{c_0} \quad (18)$$

pour les ondes acoustiques et une ligne verticale d'équation

$$\frac{k_z}{\omega} = \frac{1}{M_{mz}} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k} \right) \frac{1}{c_0} \quad (19)$$

pour les ondes de vorticités, dans le plan des vecteurs lents $[k_z/\omega, k_r/\omega]$ (voir Fig.3). La vitesse de groupe et le vecteur lent sont définis respectivement par $\mathbf{v}_g = \nabla_k \omega$ et $\mathbf{l} = [k_z/\omega, k_r/\omega]$. L'excentricité de l'ellipse présente une région dans laquelle \mathbf{l} et \mathbf{v}_g sont de directions opposées (partie de

l'ellipse en pointillé). Cette zone d'instabilité est localisée en:

$$-\frac{M_{mz}}{1-M_{mz}^2} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k}\right) \frac{1}{c_0} < k_z/\omega < 0. \quad (20)$$

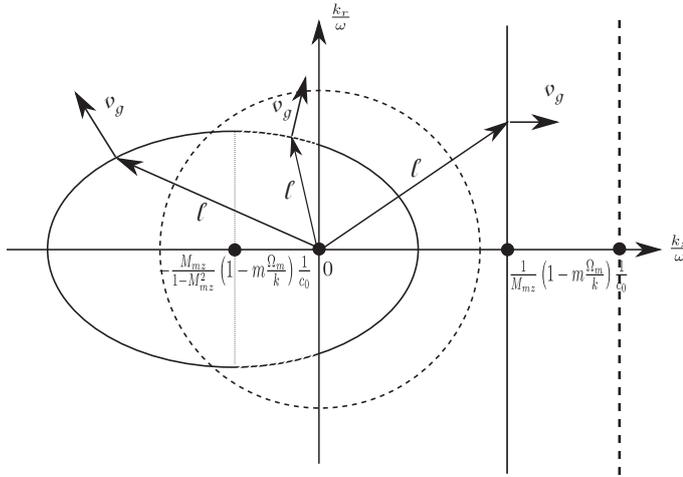


Figure 3: Courbe des vecteurs lents avant (ligne continue) et après (ligne pointillée) le changement de variables.

Afin d'obtenir la cohérence adéquate entre la vitesse de groupe et le vecteur lent, il est nécessaire de translater l'ellipse à l'origine du repère:

$$\frac{\bar{k}_z}{\bar{\omega}} = \frac{k_z}{\omega} + \frac{M_{mz}}{1-M_{mz}^2} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k}\right) \frac{1}{c_0}. \quad (21)$$

Si $\bar{\omega} = \omega$, l'Eq.(21) devient:

$$\bar{k}_z = k_z + \frac{M_{mz}}{1-M_{mz}^2} \left(1 - m \frac{\Omega_m}{k}\right) \frac{\omega}{c_0}. \quad (22)$$

Un changement de variables est aussi réalisé sur k_r :

$$\bar{k}_r = \frac{1}{\sqrt{1-M_{mz}^2}} k_r. \quad (23)$$

Ces transformations correspondent au changement de variables spatio-temporel exprimé dans l'Eq.(6).

4 Résultats et discussions

Dans cette partie, la méthodologie de validation est développée et un cas test de PML appliquée à un mode inverse en présence d'un écoulement axial cisailé et tournant est montré à titre d'exemple.

Afin de tester le modèle éléments finis de la PML, la méthodologie de validation est la suivante. Un modèle de conduit annulaire est utilisé avec une terminaison PML permettant l'absorption des ondes acoustiques se propageant suivant z (voir Fig.4).

Dans un premier temps, la PML du domaine Ω_2 est remplacée par un domaine propagatif classique, et les déplacements Lagrangiens obtenus à partir d'un modèle semi-analytique basé sur l'équation de Pridmore-Brown généralisé à un écoulement tournant sont imposés à la section d'entrée, en $z = 0$ (*inlet*) et à la section de sortie, en $z = L + L_{pml}$ (*outlet*) du conduit. La solution du modèle est

alors calculée et le domaine Ω_1 constituera la solution de référence (*inlet-outlet*) pour une configuration donnée.

Ensuite, une couche PML occupe le domaine Ω_2 et la solution du domaine Ω_1 est calculée puis comparée avec la solution de référence du modèle.

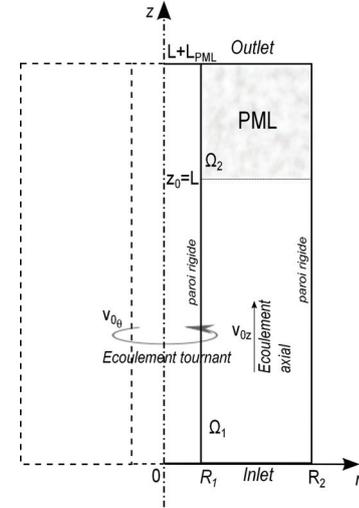


Figure 4: Géométrie d'un conduit annulaire muni de parois internes et externes rigides, en présence d'un écoulement et d'une terminaison PML

La précision des solutions en présence de la PML est déterminée en utilisant l'erreur relative de la norme L^2 comme suit:

$$Erreur\ relative = \frac{\left(\int_{\Omega_1} |p_{PML} - p_{ref}| dr dz\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega_1} |p_{ref}| dr dz\right)^{1/2}} \quad (24)$$

où p_{ref} est la solution numérique dans le domaine Ω_1 en présence des déplacements imposés *inlet-outlet*, et p_{PML} la solution numérique avec PML. De cette manière, l'erreur relative calculée par l'Eq.(24) est directement liée à l'introduction de la PML, indépendamment des éventuelles imprécisions numériques inhérentes au modèle et à la finesse de la discrétisation.

Par la suite, des variables adimensionnelles sont utilisées avec les paramètres de références: ρ_0 , c_0 et $L_0 = R_2$. Le coefficient d'absorption σ_z est choisi avec un profil parabolique permettant d'atténuer l'onde progressivement:

$$\sigma_z = \beta_z (z - z_0)^2 \quad (25)$$

avec β_z le paramètre d'absorption.

Le cas test s'intéresse à un mode inverse. La configuration étudiée est la suivante: mode azimutal $m = 2$, $\omega = 15.19$, $k_z = -5.12$, écoulement axial cisailé $M_{mz} = 0.39$ (couche limite $\delta = 0.08$ avec un profil supposé parabolique comme le montre la Fig.5), écoulement tournant en bloc rigide $\Omega_m = 0.4$, rayon interne $R_1 = 0.4$ et rayon externe $R_2 = 1.0$. La longueur de la PML $L_{pml} = 5$ et le coefficient d'absorption $\beta_z = 0.01$.

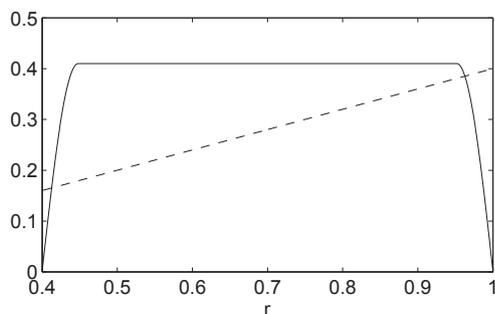


Figure 5: Profile de vitesse de l'écoulement axial avec $M_{mz} = 0.39$ (—) et de l'écoulement azimuthal en bloc rigide $\Omega_m = +0.4$ (- -).

La solution FEM-PML est montrée Fig.6. L'erreur relative de 1.0% montre que l'absorption de la PML a été efficace.

La formulation classique de la PML donne des résultats quasiment identiques à ceux de la PML modifiée ce qui confirme les conclusions émises par Bécache [15].

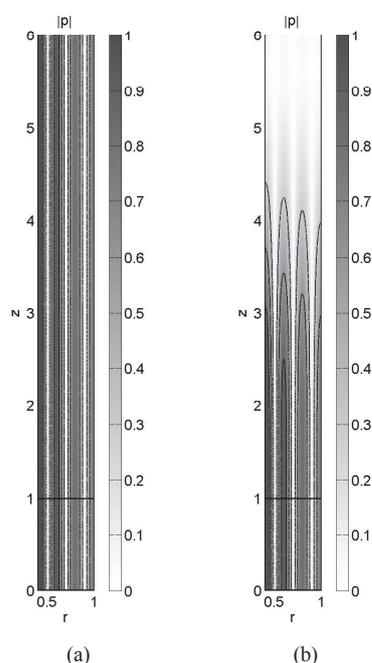


Figure 6: Module de la pression du mode (+2,4) à $\omega = 15.19$, $M_{mz} = 0.39$ (écoulement axial cisailé) et $\Omega_m = +0.4$ (bloc-rigide) pour $\beta_z = 0.01$; (a) modèle de référence (inlet-outlet); (b) modèle avec PML.

5 Conclusion

Une formulation PML appliquée à l'équation de Galbrun en coordonnées cylindriques et en régime harmonique a été proposée. Cette formulation permet l'absorption des ondes acoustiques se propageant suivant r et suivant z en présence d'un écoulement axial cisailé et d'un écoulement tournant. La PML est validée suivant z en présence d'un mode inverse.

La formulation classique et la formulation modifiée sont valables même en présence d'un mode inverse.

References

- [1] J. P. Bérenger, A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics* **114**, 185-200 (1994).
- [2] I. Harari, M. Slavutin et E. Turkel, Analytical et numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation, *Journal of Computational Acoustics* **8**, 121-137 (2000).
- [3] C. K. W. Tam, L. Auriault et F. Cambuli, Perfectly matched layers as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains, *Journal of Computational Physics* **144**, 213-243 (1998).
- [4] J. S. Hesthaven, On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations, *Journal of Computational Physics* **142**, 469-492 (2005).
- [5] S. Abarbanel, D. Gottlieb et J.S. Hesthaven, Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics, *Journal of Computational Physics* **145(2)**, 266-283 (1999).
- [6] F. Q. Hu, A stable perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables, *Journal of Computational Physics* **173**, 455-480 (2001).
- [7] J. Diaz et P. Joly, A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195(29-32)**, 3820-3853 (2006).
- [8] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia et G. Legendre, Perfectly matched layers for the time-harmonic acoustics in the presence of uniform flow, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **44(3)**, 1191-1217 (2006).
- [9] F. Treyssède, G. Gabard et M. Ben Tahar, A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description, *Journal of Acoustical Society of America* **113**, 705-716 (2003).
- [10] F. Treyssède et M. Ben Tahar, Validation of a finite element method for sound propagation and vibro-acoustic problems with swirling flows, *Acta Acustica united with Acustica* **90**, 731-745 (2004).
- [11] G. Gabard, F. Treyssède et M. B. Tahar, A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows, *Journal of Sound and Vibration* **272**, 991-1011 (2004).
- [12] X. Feng et M. Ben Tahar, PML absorbing boundary conditions for the aeroacoustic galbrun equation in the time domain, *Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration, Vilnius, Lithuania* **1**, 589-596 (2012).
- [13] G. Gabard, R. J. Astley et M. Ben Tahar, Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics. II: Two-dimensional effects, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **63**, 947-973 (2005).

- [14] F. Q. Hu, A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow, *Journal of Computational Physics* **208**, 465-492 (2005).
- [15] H. Bécache, Méthodes variationnelles, domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides, *Habilitation Université Paris-Dauphine*, 66-70 (2003).