

Diffusion Acoustique en Géométrie Elliptique, Résonances et Levée de Dégénérescence

E. Bazzali, S. Ancey, P. Gabrielli et M. Mercier

UMR CNRS 6134 SPE - Univ. de Corse, Campus Grimaldi, Bâtiment Alfonsi, 20250 Corte, France
ebazzali@gmail.com

Le problème de la diffusion acoustique par des cylindres elliptiques infinis élastiques est traité à partir d'une approche modale en mettant en avant le rôle des symétries. Plus précisément, la brisure de symétrie lors du passage du cylindre circulaire au cylindre elliptique engendre une levée de dégénérescence des résonances. D'un point de vue mathématique, la théorie des groupes fournit le cadre rigoureux pour expliquer cette séparation des résonances. En effet, le groupe continu $O(2)$ caractérise l'invariance par rotation du cylindre circulaire. Lors de la déformation vers le cylindre elliptique, cette invariance est brisée. Toutefois, l'objet demeure invariant sous les actions du groupe discret C_{2v} , et les résonances sont alors associées à une représentation irréductible donnée de C_{2v} . La principale difficulté est l'application de la théorie des groupes dans le cadre du formalisme vectoriel de l'élastodynamique. Cependant, la méthode simplifie considérablement le traitement du problème et fournit une classification des résonances. Une partie expérimentale en spectroscopie ultra-sonore vient compléter l'étude théorique. Une série d'expériences en cuve est menée dans le cas de cylindres elliptiques en aluminium immergés dans l'eau, dans la bande de fréquence $0 \leq kr \leq 50$, où kr est le nombre d'onde réduit dans le fluide. On brise la symétrie en choisissant différents cylindres d'excentricité croissante. Plus précisément, le phénomène de levée de dégénérescence est d'autant plus marqué que l'excentricité est forte. Les résultats expérimentaux présentent un très bon accord avec les résultats théoriques et la levée de dégénérescence est observée sur des fonctions de forme expérimentales.

1 Introduction

La diffusion acoustique par des objets de forme simple a été largement étudiée au cours des 50 dernières années, mais peu d'attention a été portée aux cylindres elliptiques [1, 2], notamment dans le domaine expérimental [2, 3, 4].

On étudie la diffusion d'une onde acoustique plane par un cylindre elliptique élastique infini à partir d'un formalisme modal associé à une méthode basée sur la théorie des représentations des groupes pour prendre en compte les symétries [5, 6, 7, 8]. Le problème est étudié théoriquement, numériquement et expérimentalement. L'équation d'Helmholtz n'est pas séparable dans le système de coordonnées elliptiques en élastodynamique, en raison de la coexistence des ondes longitudinales et transversales [9, 10]; on utilise alors les coordonnées cylindriques. On s'intéresse notamment à la levée de dégénérescence des résonances liée à la brisure de symétrie lors de la transition du cylindre circulaire vers le cylindre elliptique. Les principaux avantages de la méthode sont : (i) le découplage des équations, (ii) la classification des résonances, (iii) la mise en évidence de la levée de dégénérescence des résonances et son interprétation en termes de brisure de symétrie et (iv) l'amélioration du traitement numérique du problème.

2 Position et géométrie du problème

On considère une onde acoustique plane diffusée par un cylindre elliptique élastique infini immergé dans un fluide homogène de masse volumique ρ_f et de vitesse de propagation du son c . Le milieu élastique est caractérisé par la masse volumique ρ_s et des vitesses de propagation c_L et c_T associées aux ondes longitudinales et transversales. On introduit les nombres d'onde $k_L = \omega/c_L$ et $k_T = \omega/c_T$, où ω est la pulsation (dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$). L'axe Oz est parallèle à l'axe du cylindre et (ρ, θ) sont les coordonnées polaires dans un plan perpendiculaire à Oz . Le vecteur d'onde \mathbf{k} de l'onde incidente est perpendiculaire à l'axe Oz et forme un angle α avec l'axe Ox , on se ramène donc à un problème à deux dimensions. La géométrie et les notations utilisées sont données dans la figure 1. La surface du cylindre est une courbe elliptique fermée décrite par le rayon $r(\theta) = b(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}$ avec une normale

extérieure $\mathbf{n}(\theta) = n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta$, où l'excentricité e est définie par $e^2 = 1 - (b/a)^2$.

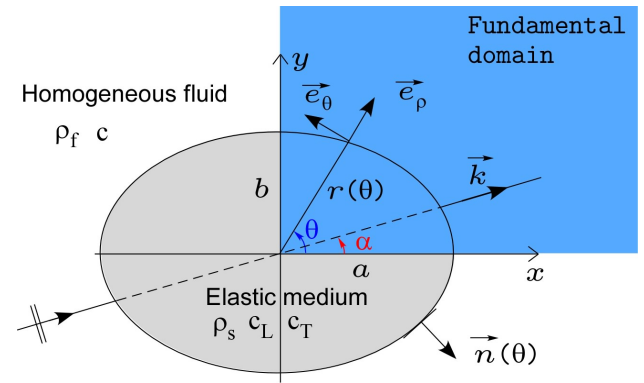


FIGURE 1 – Géométrie du problème.

On exprime les ondes incidente et diffusée en termes de pression par

$$p_{\text{inc}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k\rho) e^{in(\theta-\alpha)} \quad \text{et} \quad p_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\theta} \quad (1)$$

où les coefficients inconnus A_n^S sont à déterminer.

Le déplacement élastique \mathbf{u} s'exprime à partir de la décomposition d'Helmholtz

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi + \nabla \wedge \Psi \quad (2)$$

avec ϕ et $\Psi = \psi \mathbf{e}_z$ les potentiels scalaire et vectoriel respectivement associés aux ondes longitudinales et transversales. On a

$$\phi = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L \rho) e^{in\theta}, \quad \psi = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^T J_n(k_T \rho) e^{in\theta} \quad (3)$$

où les coefficients inconnus A_n^j , $j \in \{L, T\}$, sont à déterminer.

Considérations de symétrie Le cylindre elliptique infini est invariant selon quatre transformations de symétrie : (i) l'identité E , (ii) C_2 , la rotation d'un angle π autour de l'axe Oz , (iii) σ_x , la réflexion miroir dans le plan Oxz et (iv) σ_y , la réflexion miroir dans le plan Oyz . Ces quatre transformations forment le groupe fini C_{2v} , qui est le groupe de symétrie du cylindre elliptique infini [11]. Quatre

TABLEAU 1 – Table des caractères de C_{2v} .

$C_{2v} :$	E	C_2	σ_x	σ_y
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

représentations irréductibles (IRep) unidimensionnelles notées A_1, A_2, B_1, B_2 sont associées à ce groupe. Le passage du disque circulaire au disque elliptique correspond à la brisure de la symétrie $O(2)$ (invariance pour toute rotation d'axe Oz). En utilisant la table des caractères (Tableau 1), on montre que toute fonction $\mathbf{f}(\rho, \theta)$ (scalaire ou vectorielle) peut se décomposer sur les 4 IRep sous la forme

$$\mathbf{f}(\rho, \theta) = \mathbf{f}^{A_1}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{A_2}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{B_1}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{B_2}(\rho, \theta). \quad (4)$$

Toutes les quantités physiques du problème seront décomposées sur les 4 IRep du groupe C_{2v} . De plus, les considérations de symétrie permettent de restreindre l'étude au domaine dit fondamental $\theta \in [0, \pi/2]$ (Voir Figure 1), ce qui améliore considérablement les aspects théorique et numérique.

3 Résolution du problème

Les conditions de passage à la surface du diffuseur sont appliquées en $\rho = r(\theta)$ pour obtenir les résonances et déterminer les coefficients inconnus. Elles s'écrivent en imposant la continuité du déplacement normal et de la contrainte normale :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(\theta) = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \nabla(p_{inc} + p_s) \cdot \mathbf{n}(\theta) \quad (5)$$

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}(\theta) = -(p_{inc} + p_s) \mathbf{n}(\theta) \quad (6)$$

Elles sont ensuite écrites à partir de la série modale et exprimées dans chaque IRep R_i , $R_i \in \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$. Ceci permet de réduire la somme sur n de $[-\infty, +\infty]$ à $[0, +\infty]$. Pour s'affranchir de la dépendance angulaire en θ , on développe en série de Fourier les expressions qui dépendent de $r(\theta)$ et $\mathbf{n}(\theta)$ en posant

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta}, \quad \text{avec } f_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) e^{-ip\theta} d\theta. \quad (7)$$

Dans l'équation (7), la restriction au domaine fondamental et la parité de $F_n(\theta)$ permettent de réduire le domaine d'intégration de $[-\pi, \pi]$ à $[0, \pi/2]$ et la somme sur p de $[-\infty, +\infty]$ à $[0, +\infty]$ avec p pair (A_1, A_2) ou p impair (B_1, B_2). On obtient alors un système d'équations dans chaque IRep, chacune des équations s'écrit avec une double somme, l'une portant sur l'indice n associé au mode de vibration, l'autre sur l'indice p de la série de Fourier.

$$\begin{aligned} \left[A_n^L \alpha_{n,p}^L + A_n^T \alpha_{n,p}^T + A_n^S \alpha_{n,p}^S \right] \frac{\cos p\theta}{\sin p\theta} &= \frac{\cos n\alpha \cos p\theta}{\sin n\alpha \sin p\theta} \alpha_{n,p}^{inc} \\ \left[A_n^L \beta_{n,p}^L + A_n^T \beta_{n,p}^T + A_n^S \beta_{n,p}^S \right] \frac{\cos p\theta}{\sin p\theta} &= \frac{\cos n\alpha \cos p\theta}{\sin n\alpha \sin p\theta} \beta_{n,p}^{inc} \\ \left[A_n^L \xi_{n,p}^L + A_n^T \xi_{n,p}^T + A_n^S \xi_{n,p}^S \right] \frac{\sin p\theta}{\cos p\theta} &= \frac{\cos n\alpha \sin p\theta}{\sin n\alpha \cos p\theta} \xi_{n,p}^{inc} \end{aligned} \quad (8)$$

Les indices n, p sont pairs pour A_1, A_2 et impairs pour B_1, B_2 . Le détail des calculs est donné dans la référence [8]. Les fonctions trigonométriques qui apparaissent dans chacune des équations précédentes sont associées à A_1 et B_1 pour la ligne supérieure et à A_2 et B_2 pour la ligne inférieure.

En prenant en compte les symétries du problème, celui-ci est décomposé sur les 4 IRep du groupe C_{2v} . Les coefficients inconnus sont alors découplés et on obtient une classification complète des résonances. Les quantités physiques considérées dans la suite sont les résonances, le déplacement élastique, la pression diffusée et la fonction de forme en champ lointain.

Les résonances sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique pour chaque IRep R_i

$$\det M^{R_i} = 0 \quad (9)$$

où M^{R_i} est la matrice issue du système d'équations (8).

Le déplacement élastique \mathbf{u} est exprimé dans chaque IRep R_i et les modes normaux de vibration sont obtenus en calculant $|\mathbf{u}^{R_i}|$.

$$\mathbf{u}^{R_i} = \sum_n \mathcal{V}(\rho) \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \mathbf{e}_\rho + \mathcal{W}(\rho) \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix} \mathbf{e}_\rho, \quad \begin{matrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{matrix} \quad (10)$$

avec n pair (A_1, A_2) ou n impair (B_1, B_2). Les fonctions radiales $\mathcal{V}(\rho)$ et $\mathcal{W}(\rho)$ sont des fonctions qui regroupent les coefficients inconnus, les fonctions de Bessel et leurs dérivées.

Enfin, la pression diffusée est exprimée dans chaque IRep et l'on trace ensuite son amplitude normalisée par la pression incidente. La fonction de forme en champ lointain FF_∞ est définie par

$$FF_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{a}} \sqrt{\frac{2\rho}{a}} \left| \frac{p_s}{p_{inc}} \right| \quad (11)$$

avec $a_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ et $p_s = p_s^{A_1} + p_s^{A_2} + p_s^{B_1} + p_s^{B_2}$.

4 Résultats numériques et comparaison avec l'expérience

4.1 Considérations numériques

Les matrices qui interviennent dans les calculs numériques sont de dimension infinie et doivent être tronquées pour obtenir une solution numérique. L'ordre de troncature choisi N , testé numériquement, dépend du nombre d'onde réduit sans dimension ka (où a est le demi-grand axe du cylindre elliptique). Grâce à la théorie des groupes, les matrices sont alors de dimensions $(N \times N)$, plutôt que $(2N \times 2N)$ pour le problème couplé (*i.e.* sans théorie des groupes), ce qui améliore considérablement les calculs numériques.

Les coefficients inconnus sont déterminés numériquement en résolvant, dans chaque IRep, le système d'équations (8) tronqué afin d'obtenir le déplacement élastique, la pression diffusée et la fonction de forme en champ lointain. Les résonances sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique (9).

TABLEAU 2 – Caractéristiques fréquentielles des transducteurs.

	Fréquence centrale	Bande passante à -12dB
V389	$f \approx 475$ kHz $kr \approx 15$	$250 \text{ kHz} \lesssim f \lesssim 700 \text{ kHz}$ $8 \lesssim kr \lesssim 22$
V392	$f \approx 870$ kHz $kr \approx 28$	$400 \text{ kHz} \lesssim f \lesssim 1300 \text{ kHz}$ $13 \lesssim kr \lesssim 41$

4.2 Dispositif expérimental

Une série d'expériences a été menée dans le cas de la diffusion d'ondes acoustiques planes par des cylindres elliptiques en aluminium Ag4mc ($\rho_s = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$; $c_L = 6277 \text{ m.s}^{-1}$; $c_T = 3162 \text{ m.s}^{-1}$), de longueur 40 cm et pour différents rapports b/a (0.9640 - 0.9051 - 0.7616 - 0.6351 - 0.5370). Les cylindres sont immergés dans une cuve remplie d'eau (190 cm \times 130 cm \times 90 cm - $\rho_w = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_w = 1482.7 \text{ m.s}^{-1}$). On notera qu'ils ont été usinés à périmètre constant pour que toute onde circonférentielle ait le même temps de parcours quel que soit le rapport b/a . Les transducteurs sont des modèles PANAMETRICS dont les caractéristiques fréquentielles sont données dans le tableau 2. Leur surface active est de 4 cm et la distance entre les cylindres et les transducteurs est de 60 cm, ce qui assure les conditions de champ lointain.

Les résultats expérimentaux sont obtenus par spectroscopie ultra-sonore en configuration monostatique et bistatique. Dans la première configuration, un seul transducteur fonctionne en émission/réception, l'angle d'incidence étant fixé. C'est la configuration retenue pour obtenir les fonctions de forme. Dans la seconde, un transducteur fonctionne en émission et l'autre en réception, l'angle d'incidence de l'émetteur étant fixé tandis que le récepteur tourne autour du diffuseur pour obtenir des diagrammes angulaires.

4.3 Comparaison Théorie/Expérience

Les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats théoriques en figures 4-7. On observe un très bon accord théorie/expérience, en particulier, les nombreuses variations rapides de forme caractéristiques des fonctions de forme. Elles sont associées aux résonances élastiques dans le plan complexe de la variable kr .

On s'intéresse à la levée de dégénérescence des résonances qui peut être interprétée en termes de brisure de symétrie. La symétrie du cylindre circulaire est brisée en sélectionnant différents cylindres de rapport b/a décroissant. Les résonances du cylindre circulaire sont associées aux modes résonants (n, ℓ) dans le formalisme modal usuel. Elles sont suivies à mesure qu'on le déforme vers un cylindre elliptique, en conservant un périmètre constant. Sur les figures 2 et 3, on suit deux modes résonants du cylindre circulaire. Les modes (1,2) et (3,2) sont respectivement suivis sur des fonctions de forme, obtenues numériquement, et dans le plan complexe de la variable kr en figures 2-Haut et 3-Haut. La levée de dégénérescence s'opère (ici en B_1 et B_2) dès que la symétrie est à peine brisée ($b/a=0.9640$), et l'on suit l'évolution des modes $(1,2)^{B_1} - (1,2)^{B_2}$ et $(3,2)^{B_1} - (3,2)^{B_2}$ en traçant, dans les IRep B_1 et B_2 , le déplacement élastique et la pression diffusée normalisée par la pression incidence. On note en particulier que les deux modes *séparés* se comportent très différemment à mesure

que la déformation augmente en observant les lobes de ré-émission de la pression diffusée.

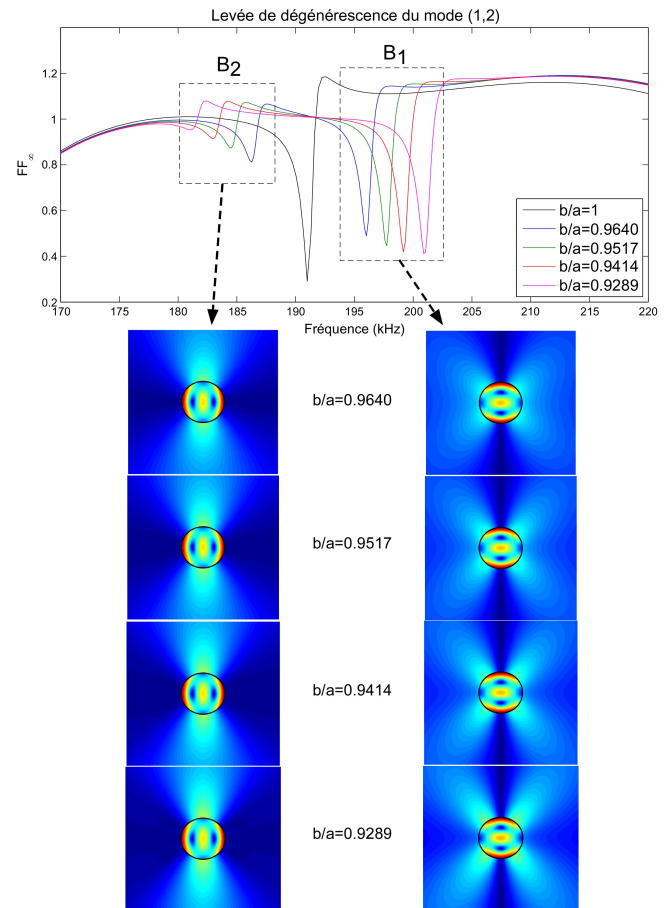


FIGURE 2 – Levée de dégénérescence du mode (1,2).
(Haut) Fonctions de forme.
(Bas) Pression diffusée et déplacement élastique.

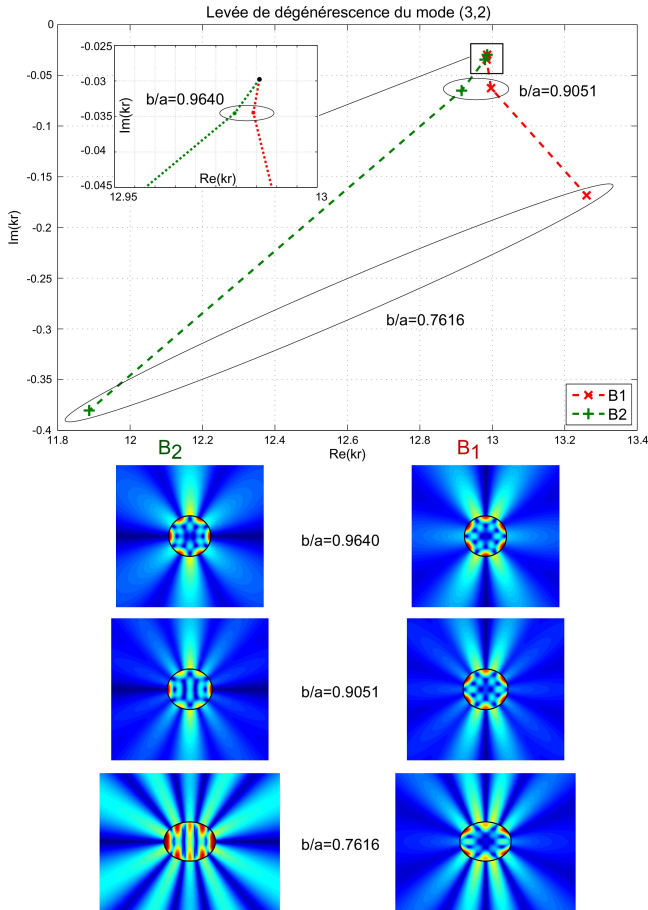


FIGURE 3 – Levée de dégénérescence du mode (3,2).
(Haut) Fonctions de forme.
(Bas) Pression diffusée et déplacement élastique.

Sur la figure 4a, on présente la comparaison théorie-expérience pour la fonction de forme d'un cylindre elliptique de rapport $b/a = 0.9051$ en incidence oblique. Dans cette configuration, la pression totale p satisfait seulement à la transformation identité E . Alors, d'après la table des caractères (Tableau 1), les résonances et la pression diffusée apparaissent dans toutes les IRep. On relie ensuite les minima qui apparaissent sur les fonctions de forme théorique et expérimentale aux résonances tracées dans le plan complexe de la variable kr ¹ (Voir Figure 4b). Celles-ci sont obtenues par un suivi en excentricité des résonances du cylindre circulaire. On observe la séparation à la fois des parties réelles et imaginaires et, pour un indice angulaire n pair (resp. impair), les résonances se séparent en A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2). Parmi les modes suffisamment séparés en partie réelle, on s'intéresse au mode (1,3), séparé en B_1 et B_2 , et au mode (2,4), séparé en A_1 et A_2 . La figure 4c présente des diagrammes angulaires expérimentaux obtenus en choisissant les fréquences de l'onde plane incidente égales aux fréquences de résonance calculées numériquement pour les 4 modes distincts. Les résultats obtenus correspondent à la pression diffusée et permettent d'identifier sans ambiguïté les modes $(1,3)^{B_1}$, $(1,3)^{B_2}$, $(2,4)^{A_1}$ et $(2,4)^{A_2}$. Enfin, les amplitudes du déplacement élastique et de la pression diffusée calculées numériquement, pour chaque mode, sont tracées sur la figure 4d. Les diagrammes angulaires sont en très bon accord avec la pression diffusée (normalisée par la

1. On limite la partie imaginaire à -0.2 car les résonances dont la valeur absolue de la partie imaginaire est supérieure sont trop atténuées pour être observées sur une fonction de forme

pression incidente) calculée numériquement dans chaque IRep.

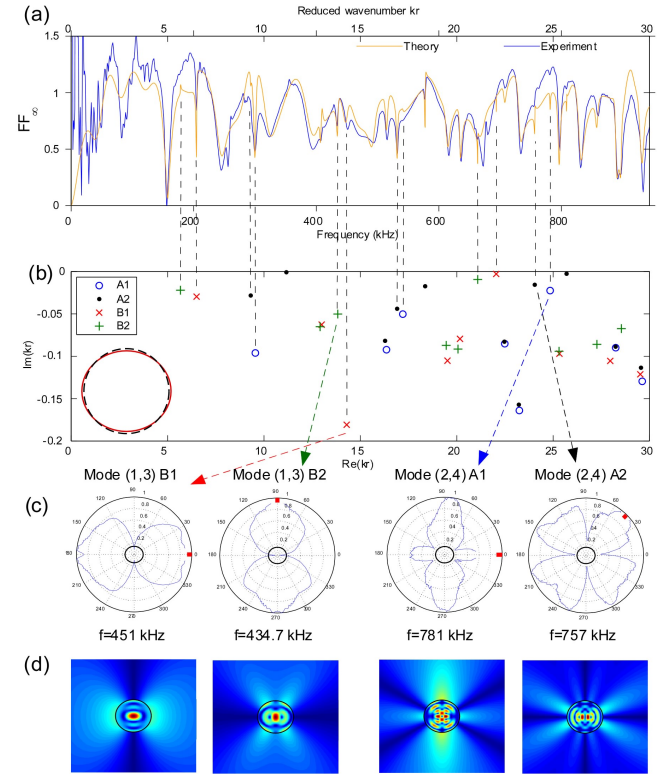


FIGURE 4 – Cylindre elliptique $b/a = 0.9051$.

(a) Comparaison des fonctions de forme théorique et expérimentale pour $\alpha = 45^\circ$. (b) Résonances de diffusion dans le plan complexe de la variable kr . (c) Diagrammes angulaires expérimentaux. (d) Amplitudes calculées du déplacement élastique et de la pression diffusée normalisée.

La figure 5 présente un excellent accord entre les résultats théoriques et expérimentaux, et met en évidence l'influence de la valeur de l'angle d'incidence. D'un point de vue théorique, lorsque $\alpha = 0^\circ$ (incidence selon le grand axe), la pression totale est invariante uniquement sous les transformations identité E et réflexion miroir σ_x . Alors, d'après la table des caractères (Tableau 1), seules les résonances qui appartiennent à A_1 et B_1 apparaissent à la fois sur les fonctions de forme théorique et expérimentale. Ceci est vérifié expérimentalement lorsqu'on relie les minima apparaissant sur les fonctions de forme aux résonances localisées dans le plan complexe.

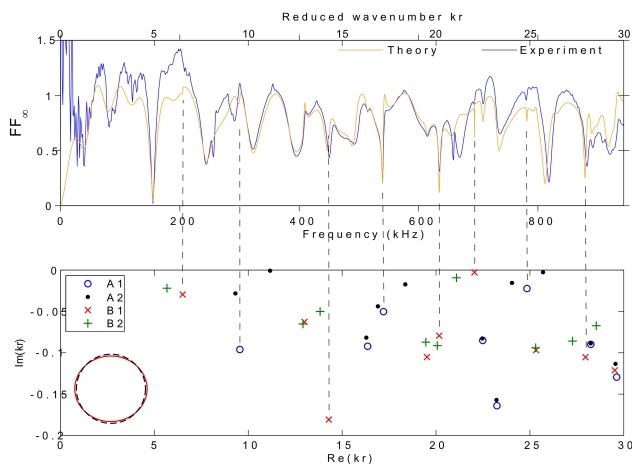


FIGURE 5 – Cylindre elliptique $b/a = 0.9051$. Comparaison des fonctions de forme théorique et expérimentale pour $\alpha = 0^\circ$ et résonances de diffusion dans le plan complexe de la variable kr .

La figure 6 présente un très bon accord théorie/expérience pour une faible valeur du rapport b/a (excentricité importante). Bien que l'on puisse déterminer numériquement les résonances pour des excentricités importantes, l'identification des modes *séparés* dans chaque IRep sur les fonctions de forme devient de plus en plus difficile. En effet, de nombreuses résonances sont trop atténuées pour être observées sur des fonctions de forme car la valeur absolue de leur partie imaginaire augmente. Néanmoins, la levée de dégénérescence peut toujours être observée pour les valeurs complexes des résonances.

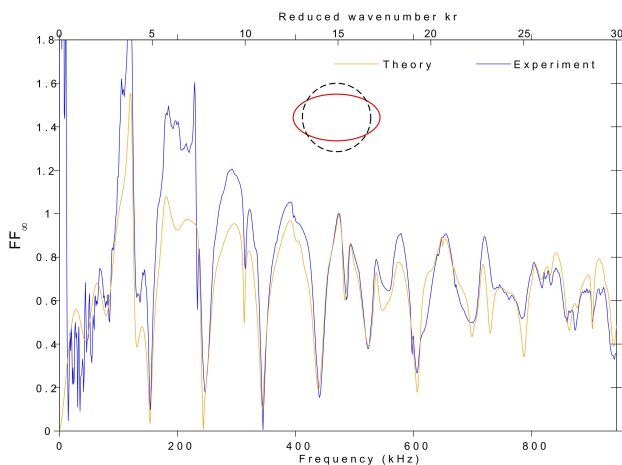


FIGURE 6 – Comparaison des fonctions de forme théorique et expérimentale pour un cylindre elliptique $b/a = 0.5370$ (excentricité importante) pour $\alpha = 45^\circ$.

Enfin, un très bon accord théorie/expérience est également obtenu en haute fréquence (jusqu'à $kr = 50$) sur la figure 7.

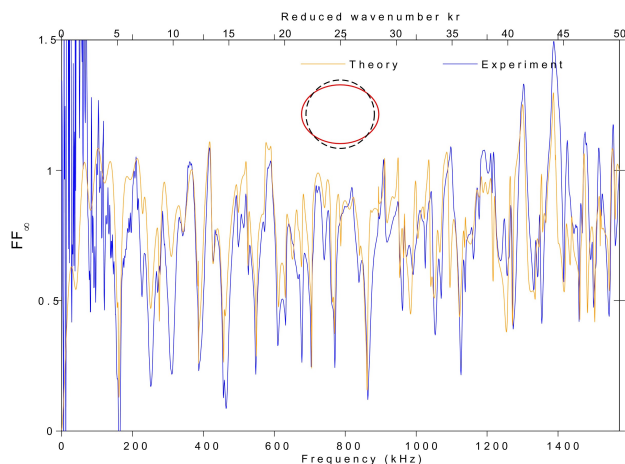


FIGURE 7 – Comparaison des fonctions de forme théorique et expérimentale pour un cylindre elliptique de rapport $b/a = 0.7616$ pour $\alpha = 45^\circ$.

5 Conclusion et perspectives

La diffusion d'une onde acoustique plane par un cylindre elliptique élastique infini est étudiée à partir du formalisme modal en prenant en compte les symétries du diffuseur. L'utilisation de la théorie des groupes permet le découplage du problème selon les 4 IRep du groupe de symétrie du diffuseur. On obtient ainsi une classification complète des résonances. De plus, la levée de dégénérescence des résonances est interprétée en termes de brisure de symétrie et est clairement observée à la fois théoriquement et expérimentalement. Seule la théorie des groupes nous permet de mettre en évidence ce phénomène et de relier les modes *séparés* au mode d'origine dégénéré du cylindre circulaire. D'autre part, cette méthode améliore le traitement numérique du problème et permet de mener à bien les calculs en haute fréquence ainsi que pour de faibles rapports b/a .

Enfin, une série d'expériences en cuve par spectroscopie ultra-sonore est menée dans le cas de cylindres elliptiques en aluminium immergés dans l'eau. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec la théorie.

Cette approche peut être étendue au cas tridimensionnel pour le problème de la diffusion acoustique par un sphéroïde. Il serait intéressant d'observer la levée de dégénérescence des résonances liée à la brisure de symétrie $O(3) \rightarrow \mathcal{D}_{\infty h}$ (sphère \rightarrow sphéroïde).

Références

- [1] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi, J. S. Asvestas, Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes, North-Holland Pub. Co., 1970.
- [2] F. Léon, F. Chati, J. M. Conoir, Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section, J. Acoust. Soc. Am. 116 (2) (2004) 3600.
- [3] P. A. Chinnery, V. F. Humphrey, Fluid column resonances of water-filled cylindrical shells of elliptical cross section, J. Acoust. Soc. Am. 103 (3) (1998) 1296.
- [4] A. Pereira, A. Tadeu, J. Antonio, Influence of the cross-section geometry of a cylindrical solid submerged in an

- acoustic medium on wave propagation, *Wave Motion* 36 (2002) 23–39.
- [5] S. Ancey, A. Folacci, P. Gabrielli, Whispering-gallery modes and resonances of an elliptic cavity, *J. Phys. A : Math. Gen.* 34 (2001) 2657.
- [6] P. Gabrielli, M. Mercier-Finidori, Acoustic scattering by two spheres : multiple scattering and symmetry considerations, *Journal of Sound and Vibration* 241 (3) (2001) 423–439.
- [7] S. Ancey, E. Bazzali, P. Gabrielli, M. Mercier, Elastodynamics and resonances in elliptical geometry, *J. Phys. A : Math. Gen.* 46 (43) (2013) 435204.
- [8] S. Ancey, E. Bazzali, P. Gabrielli, M. Mercier, Acoustic scattering by elastic cylinders of elliptical cross section and splitting up of resonances, submitted to the *Journal of Applied Physics*
- [9] V. V. Varadan, Y. H. Pao, Scattering matrix for elastic waves. i. theory, *J. Acoust. Soc. Am.* 60 (3) (September 1976) 556.
- [10] V. V. Varadan, Scattering matrix for elastic waves. ii. application to elliptic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.* 63 (4) (Apr. 1978) 1014.
- [11] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, New York : Dover, 1989.