



## **Sur les methodes de type Trefftz et weak Trefftz pour les problemes de vibration**

H. Riou et P. Ladeveze

LMT ENS Cachan, 61 avenue du President WILSON, 94230 Cachan, France  
riou@lmt.ens-cachan.fr

La prédiction des réponses vibratoires des systèmes complexes est devenue un des enjeux industriels majeurs de notre époque. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des stratégies de calcul capables de prendre en compte leur complexité, c'est à dire montrant de l'efficacité dans des régimes vibratoires très différents. A ce titre, les stratégies de calcul qui s'appuient sur des éléments finis ont montré leur pertinence dans le domaine des vibrations basses fréquences. Les stratégies qui s'appuient sur des méthodes de Trefftz présentent quant à elles un gros intérêt dans le domaine des moyennes fréquences. Ce travail a pour objectif de mixer ces deux types de stratégies de calcul, afin de pouvoir balayer les basses et les moyennes fréquences en même temps. Il s'appuie sur la définition de nouvelles formulations qui affaiblissent les conditions de Trefftz, liées à la nécessité absolue de vérifier exactement les équations d'équilibre et les relations de comportement, et qui peuvent être appelées «weak Trefftz». Il permet d'aboutir à des stratégies de calcul hybrides qui allient ensemble les meilleures propriétés de calcul, en fonction du régime vibratoire des différentes parties du système que l'on souhaite considérer. Plusieurs exemples numériques illustreront cela.

## 1 Introduction

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis (FEM) [1] est très utilisée pour prédire les performances des systèmes complexes, pour les problèmes de dynamique. Cependant, comme cette méthode utilise des fonctions de forme polynomiales, elle conduit à l'utilisation de modèles numériques qui sont très gros. En conséquence, elle ne peut être utilisée que dans le domaine des basses fréquences.

Les méthodes de Trefftz [2] ont été développées pour résoudre ce problème. Ces méthodes utilisent des fonctions de forme qui utilisent des solutions exactes des équations d'équilibre. Elles n'ont donc besoin de n'utiliser que très peu de fonctions, et les modèles numériques qui en découlent ont une taille très petite, en comparaison avec ceux issus de la FEM. L'utilisation d'une telle stratégie peut être observé dans les travaux suivants : la partition de l'unité [3], la formulation variationnelle ultra faible [4], la méthode de Galerkin discontinue par ondes planes [5], la méthode des moindres carrés [6], la méthode de l'enrichissement discontinu [7], la méthode de Galerkin sans élément [8], la méthode des éléments de frontière par ondes [9] et la méthode basée sur des ondes. [10]. La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC ou VTCR en anglais), qui est la stratégie de calcul utilisée dans les travaux présentés dans cet article, est aussi une méthode de Trefftz. La différence principale entre toutes ces méthodes est le traitement des conditions aux limites sur les frontières des sous structures.

La TVRC s'appuie sur l'utilisation d'une formulation variationnelle qui autorise les approximations à être indépendantes d'une sous structure à une autre. Ainsi, n'importe quelle fonction de forme peut être utilisée, à partir du moment où elle vérifie les conditions d'équilibre. Cette propriété donne à la TVRC une très grosse flexibilité dans le choix des fonctions de forme, et ainsi une grande efficacité. Cette stratégie de calcul a été initialement développée dans [11] pour les vibrations en régime permanent, et dans [12] pour la dynamique transitoire. Comme cela est indiqué dans [11], [13] et [14], c'est une stratégie de calcul qui s'est initialement appuyée sur les travaux menés dans [15] pour la statique. Comme la TVRC utilise des fonctions de forme qui sont discontinues, elle s'apparente à des méthodes Galerkin discontinues (voir [16] ou [17] pour un aperçu de ces méthodes). La formulation variationnelle de la TVRC, qui est non symétrique, peut être vue comme la version de Trefftz de la formulation Galerkin discontinue de Bauman et Oden [18].

Ce travail a pour objectif de proposer une nouvelle manière de résoudre les problèmes d'ingénieur. Il propose

un cadre de travail dans lequel la contrainte de Trefftz est levée, permettant à la TVRC d'utiliser des fonctions de forme qui ne vérifient pas systématiquement les équations d'équilibre. Ainsi, le couplage entre la TVRC (pure) et la FEM peut être réalisé. Cette approche peut être dénommée "Trefftz faible" ou encore "weak Trefftz" en anglais, car la contrainte imposée aux fonctions de forme de la TVRC a été affaiblie.

## 2 Utilisation de la TVRC pour les problèmes de vibration

Considérons le problème standard d'acoustique suivant (le domaine d'étude est  $\Omega$  et ses frontières sont notées  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  (voir la figure 1 sur la gauche)) : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} (1 + i\eta)\Delta u + k^2 u + r_d = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = u_d \text{ sur } \partial_1\Omega \\ (1 + i\eta)\partial_n u + hiku = g_d \text{ sur } \partial_2\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $\partial_n u = \mathbf{grad}u \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale sortante.  $u$  représente la pression acoustique.  $k$  est le nombre d'onde.  $r_d$  et  $g_d$  sont des sources acoustiques données sur  $\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ .  $h$  est une constante en relation avec l'impédance du milieu.  $u_d$  est la pression acoustique imposée sur  $\partial_1\Omega$ . Le coefficient d'amortissement  $\eta$  est positif.  $k$  et  $h$  sont réels, positifs et constants. Les données imposées  $r_d$ ,  $u_d$  et  $g_d$  sont supposées suffisamment régulière pour que la solution soit dans  $H^1(\Omega)$  si  $\eta > 0$  ou si  $\eta = 0$  mais avec l'aire de  $\partial_2\Omega$  qui n'est pas nulle. La première équation de (1) correspond au problème d'acoustique classique de Helmholtz.

Si on suppose que le domaine  $\Omega$  est divisé en sous domaines  $\Omega_E$ , avec  $E \in \mathbf{E}$  (voir la figure 1 au milieu), l'interface commune entre les domaines  $E$  et  $E'$  étant notée  $\Gamma_{EE'}$ , alors on doit ajouter les conditions de continuité de la pression et de son gradient sur  $\Gamma_{EE'}$ .

Définissons l'espace suivant :

$$\mathcal{U} = \{u \mid u_{|\Omega_E} \in \mathcal{U}_E\} \quad (2)$$

avec

$$\mathcal{U}_E = \left\{ u_E \mid u_E \in \mathcal{V}_E \subset H^1(\Omega_E); \right. \\ \left. (1 + i\eta)\Delta u_E + k^2 u_E + r_d = 0 \text{ on } \Omega_E \right\} \quad (3)$$

Les espaces vectoriels (avec  $r_d = 0$ ) associés à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}_E$  sont notés  $\mathcal{U}_0$  et  $\mathcal{U}_{E,0}$ . On peut définir un problème équivalent à

(1) sous la forme suivante : trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\begin{aligned} & Re \left( -ik \left( \sum_{E,E' \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( \frac{1}{2} \{ \mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} \}_{EE'} \{ \tilde{v} \}_{EE'} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} [ \tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} ]_{EE'} [ u ]_{EE'} \right) dS - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_1 \Omega} \tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u - u_d) dS \right. \\ & \left. + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_2 \Omega} \frac{1}{2} (-\tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u + (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} - g_d) / (hik)) \right. \\ & \left. + \tilde{v} (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} + hiku - g_d)) dS \right) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\tilde{\square}$  et  $Re(\square)$  représentent respectivement la partie conjuguée et la partie réelle de la quantité complexe notée  $\square$ ,  $\{u\}_{EE'} = (u_E + u_{E'})|_{\Gamma_{EE'}}$ ,  $[u]_{EE'} = (u_E - u_{E'})|_{\Gamma_{EE'}}$  et  $\mathbf{q}_u = (1 + i\eta)\mathbf{grad}u$ .

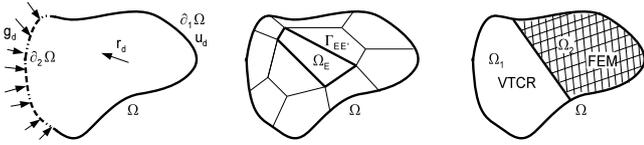


FIGURE 1 – Gauche : définition du problème de référence. Milieu : définition des sous domaines de  $\Omega$ . Droite : couplage entre la TVRC et la FEM.

La formulation (4) est celle qui est utilisée dans la TVRC. Elle autorise l'utilisation de fonctions de forme qui sont indépendantes par sous structures. La seule chose qu'il reste à faire pour obtenir une solution approchée est de remplacer  $\mathcal{U}_E$  par le sous espace de dimension finie  $\mathcal{U}_E^h$ . Les espaces associés sont notés  $\mathcal{U}^h$  et  $\mathcal{U}_0^h$ .

### 3 Formulation de type "weak Trefftz", et couplage entre la TVRC et la FEM

Avec la TVRC, les équations d'équilibre sont vérifiées dans chaque sous domaine  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$  (voir le paragraphe 2). Cependant, il peut être intéressant d'éviter cette vérification systématique, notamment si on souhaite utiliser des approximations FEM dans l'espace de travail. Pour lever cette contrainte, il faut utiliser la formulation suivante : trouver  $u \in \mathcal{U}^h$  (l'espace  $\mathcal{U}^h$  ne contient dorénavant aucune contrainte, et notamment pas celle liée à la vérification de l'équilibre) tel que

$$\begin{aligned} & Re \left( -ik \left( \sum_{E,E' \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( \frac{1}{2} \{ \mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} \}_{EE'} \{ \tilde{v} \}_{EE'} \right) dS \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} [ \tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} ]_{EE'} [ u ]_{EE'} \right) - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_1 \Omega} \tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u - u_d) dS \right. \\ & \left. + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_1 \Omega} \frac{1}{2} (-\tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u + (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} - g_d) / (hik)) \right. \\ & \left. + \tilde{v} (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} + ihku - g_d)) dS \right. \\ & \left. - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} (\text{div} \mathbf{q}_u + k^2 u + r_d) \tilde{v} d\Omega \right) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^h \end{aligned} \quad (5)$$

On peut démontrer que la formulation (5) est équivalente au problème de référence (1). Cette nouvelle formulation, contrairement à la formulation (4), ne nécessite aucune vérification d'équation initiale (comme (3) par exemple).

Ainsi, le couplage entre la TVRC et la FEM peut être effectué. En effet, si on découpe  $\Omega$  en deux parties  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on peut maintenant utiliser la TVRC dans  $\Omega_1$  et la FEM dans  $\Omega_2$  (voir la figure 1 sur la droite). L'espace de travail est  $\mathcal{U}^h = \mathcal{U}_1^h \otimes \mathcal{U}_2^h$ . Pour  $E \in \mathbf{E}_1$ , on peut retenir les fonctions de forme suivantes :

$$\mathcal{U}_E^h = \left\{ u^h \mid u^h \in \mathcal{V}_E^h; (1 + i\eta)\Delta u^h + k^2 u^h + r_d = 0 \text{ sur } \Omega_E \right\} \quad (6)$$

c'est à dire la description TVRC, et pour  $E \in \mathbf{E}_2$ , les fonctions de forme suivantes :

$$\mathcal{U}_E^h = \left\{ u^h \mid u^h \in \mathcal{V}'_E; \int_{\Omega_E} ((1 + i\eta)\Delta u^h + k^2 u^h + r_d) \tilde{v}^h d\Omega = 0 \quad \forall v^h \in \mathcal{V}'_{E,0} \right\} \quad (7)$$

c'est à dire une description FEM.

### 4 Exemple numérique : le problème d'acoustique dans une cavité en forme de L

On considère le problème homogène défini sur une cavité dont la forme est en L, et sur laquelle on impose les conditions aux limites définies sur la figure 2. On considère deux cas : dans le cas 1, le domaine entier est rempli avec un seul fluide de nombre d'onde  $k_a = 6.5 \text{ m}^{-1}$  et d'amortissement  $\eta_a = 0.001$ . Dans le cas 2, comme indiqué sur la figure 2, le domaine contient deux fluides avec des nombres d'onde  $k_a = 6.536 \text{ m}^{-1}$  et  $k_b = 29.412 \text{ m}^{-1}$  différents, et des amortissements  $\eta_a = \eta_b = 0.001$ . Dans le cas 2, le fluide avec le plus petit nombre d'onde est situé dans le rectangle inférieur droit du domaine. Les conditions aux limites sont des conditions de Robin (dernière équation de (1)) avec  $h = 0.001$  et  $g_d = 0$  ou  $1 \text{ m}^{-1}$  (voir la figure 2).

La solution de référence est celle obtenue par la FEM, avec une discrétisation  $Q1$  utilisant 30 éléments par longueur d'onde (même dans le cas 2, où il y a deux fluides). Cette discrétisation très grande nous assure de ne pas souffrir de pollution dans la solution, et donc d'avoir une solution de référence fiable.

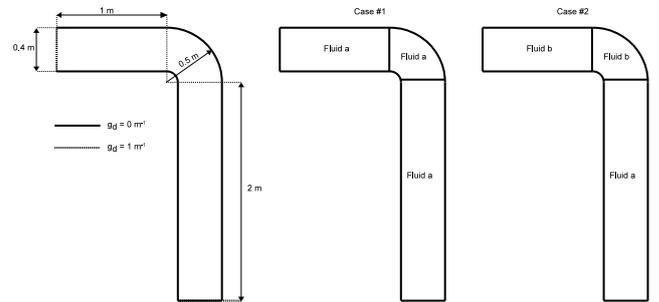


FIGURE 2 – Gauche : définition du domaine  $\Omega$  et conditions aux limites pour l'exemple retenu dans le paragraphe 4. Milieu : caractéristiques du fluide dans le cas 1. Droite : caractéristiques du fluide dans le cas 2.  $k_a = 6.536 \text{ m}^{-1}$ ,  $\eta_a = 0.001$ ,  $k_b = 29.412 \text{ m}^{-1}$ ,  $\eta_b = 0.001$ .

Considérons tout d'abord le cas 1, dans lequel le domaine  $\Omega$  est rempli avec un seul fluide (cas du milieu dans la figure 2).  $\Omega$  est discrétisé avec 3 sous domaines, comme indiqué dans la figure 3 :  $\Omega_1$  (le rectangle inférieur

droit),  $\Omega_2$  (la partie courbe) et  $\Omega_3$  (le rectangle supérieur gauche). Dans  $\Omega_1$ , nous avons utilisé un maillage FEM  $Q1$  régulier de 10 éléments le long de l'axe  $x$  et 40 éléments le long de l'axe  $y$ , (soit au total 451 DDLs). Dans  $\Omega_2$ , nous avons utilisé 9 éléments le long de l'axe radial, et 16 éléments le long de l'axe circonférentiel soit au total 170 DDLs). Enfin, dans  $\Omega_3$ , nous avons utilisé 20 éléments le long de l'axe  $x$  et 8 éléments le long de l'axe  $y$ , (soit au total 189 DDLs). Ces discrétisations ont été choisies pour avoir au moins 20 éléments par longueur d'onde et ainsi éviter les effets de pollution. De plus, on peut se rendre compte que les maillages sont incompatibles, ce qui complexifie considérablement le problème discrétisé. La solution obtenue est visible sur la droite de la figure 3. En la comparant avec la solution de référence visible au milieu de la figure 3, on peut se rendre compte que la formulation (5) fonctionne parfaitement. En effet, la solution de type "weak Trefftz" retrouve la solution de référence, même avec des maillages incompatibles, et même si la solution  $u^h$  est discontinue dans le modèle. Ce résultat montre tout l'intérêt d'une telle approche de type "weak Trefftz".

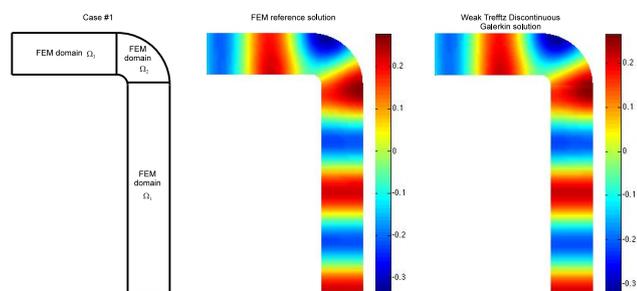


FIGURE 3 – Couplage FEM-FEM. A gauche, le découpage du domaine dans le cas 1 (voir la figure 2). Au milieu, la solution de référence FEM. A droite, la solution obtenue par la formulation "weak Trefftz" utilisant des descriptions FEM dans chaque sous domaine.

Considérons maintenant le cas 2, dans lequel  $\Omega$  contient deux fluides (partie droite de la figure 2). Nous avons utilisé le maillage de la gauche de la figure 4 en combinant les approximations FEM et VTCR.  $\Omega_1$ , où le nombre d'onde est petit, a été discrétisé en utilisant 10 éléments le long de l'axe  $x$  et 40 éléments le long de l'axe  $y$  (soit 451 DDLs au total). La VTCR a été utilisée dans les sous domaines  $\Omega_E$ ,  $E \in \{2..13\}$ . Dans tous ces sous domaines, le nombre  $N_E$  d'ondes utilisées vérifie la relation  $N_E = [2.k.diam(\Omega_E)]$ , où  $[\square]$  est la partie entière,  $k$  le nombre d'onde et  $diam(\Omega_E)$  le diamètre de  $\Omega_E$ . Ce choix nous permet d'être sûr que chaque sous domaine de la TVRC contient assez de DDLs pour obtenir une solution de bonne qualité (voir la règle heuristique dictée dans [20]). Le résultat obtenu est visible dans la figure 4. Ce résultat est très comparable à la solution de référence. En effet, tous les pics de vibration sont localisés au même endroit, et ont la même amplitude. Ainsi, cet exemple valide la stratégie proposée et montre que la formulation (5) peut trouver la solution d'un problème assez complexe qui mélange plusieurs physiques.

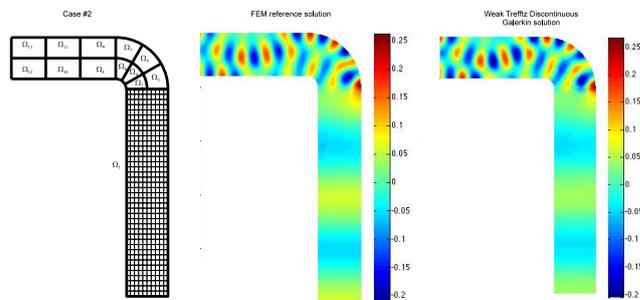


FIGURE 4 – Couplage VTCR-FEM. Gauche : découpage du domaine dans le cas 2 de la figure 2. Au milieu, la solution de référence FEM. A droite, la solution obtenue par la formulation "weak Trefftz" utilisant des descriptions FEM et VTCR dans les sous domaines.

## 5 Conclusion

Dans la TVRC initiale proposée dans [11], la solution est recherchée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions qui vérifient l'équation d'équilibre. Dans ce travail, nous avons proposé une extension de cette stratégie en permettant aux fonctions de forme de ne plus vérifier cela de manière systématique. Ainsi, une description FEM peut être utilisée dans le cadre de la TVRC. Un exemple numérique a montré que cela fonctionnait, et a couplé les approximations FEM et VTCR, en utilisant la description la plus utile dans les endroits du domaine où cela était intéressant de le faire compte tenu de la dynamique.

La formulation de type "weak Trefftz" qui est proposée ici semble être une méthode de calcul intéressante pour proposer de nouvelles manières de résoudre les problèmes d'ingénieur. Elle peut être facilement étendue aux autres problèmes, comme les problèmes quasi-statiques. Son principal intérêt est de coupler les approximations. Un autre avantage est de pouvoir prendre en compte des sous structures qui ne sont pas homogènes. Ces idées font actuellement l'objet de travaux à venir.

## Références

### Références

- [1] Zienkiewicz, O.C., 1977. The Finite Element Method. McGraw-Hill.
- [2] Trefftz, E., 1926. Ein gegenstück zum ritzschen verfahren. Second International Congress on Applied Mechanics, 131–137.
- [3] Strouboulis, T., Hidajat, R., 2006. Partition of unity method for helmholtz equation : q-convergence for plane-wave and wave-band local bases. Applications of Mathematics 51, 181–204.
- [4] Huttunen, T., Kaipio, J., Monk, P., 2008. An ultra-weak method for acoustic fluid-solid interaction. Journal of Computational and Applied Mathematics 213, 166-185.
- [5] Hiptmair, Moiola and Perugia Hiptmair, R., Moiola, A., Perugia, I., 2011. Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D

- Helmholtz equation : analysis of the p-version. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 49, 264–284.
- [6] Gabard, G., Gamallo, P., Huttunen, T., 2011. A comparison of wave-based discontinuous galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International journal for numerical methods in engineering* 85, 380–402.
- [7] Farhat, Tezaur and Toivanen Farhat, C., Tezaur, R., Toivanen, J., 2009. A domain decomposition method for discontinuous Galerkin discretizations of Helmholtz problems with plane waves and Lagrange multipliers. *International journal for numerical methods in engineering* 78, 1513–1531.
- [8] Bouillard, P., Suleaub, S., 1998. Element-free Galerkin solutions for Helmholtz problems : formulation and numerical assessment of the pollution effect. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 162, 317–335.
- [9] Beriot, Perrey-Debain, Ben Tahar and Vayssade Beriot, H., Perrey-Debain, E., Ben Tahar, M., Vayssade, C., 2010. Plane wave basis in Galerkin BEM for bidimensional wave scattering. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34, 130–143.
- [10] Deckers, E., Atak, O., Coox, L., D’Amico, R., Devriendt, H., Jonckheere, S., Ku, K., Pluymers, B., Vandepitte, D., Desmet, W., 2013. The Wave Based Method : an overview of 15 years of research. *Wave Motion*.
- [11] Ladeveze, P., 1996. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes Rendus Academie des Sciences Paris* 332, 849–856.
- [12] Ladeveze, P., Chevreuril, M., 2005. A new computational method for transient dynamics including the low and the medium-frequency ranges. *International journal for numerical methods in engineering* 64, 503–527.
- [13] Ladeveze, P., Arnaud, L., Rouch, P., Blanze, C., 2001. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations* 18, 193–214.
- [14] Ladeveze, P., Barbarulo, A., Riou, H., Kovalevsky, L., 2012. MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics, Chapt. 5 LMT Cachan, 155-203. Leuven University Press.
- [15] Hochard, C., Ladeveze, P., Proslier, L., 1993. A simplified analysis of elastic structures, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 12, 509–535.
- [16] Cockburn, B., Karniadakis, G.E., Shu, C.W., 2000. *Discontinuous Galerkin methods : Theory, computation, and applications*, volume 11 of lecture notes in computational science and engineering.
- [17] Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L.D., 2002. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis* 39, 1749–1779.
- [18] Baumann, C.E., Oden, J.T., 1999. A discontinuous hp finite element method for convection diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175, 311–341.
- [19] Kovalevsky, L., Ladeveze, P., Riou, H., Bonnet, M., 2012. The variational theory of complex rays for three-dimensional Helmholtz problems. *Journal of Computational Acoustics* .
- [20] Kovalevsky, L., Ladeveze, P., Riou, H., 2012. The Fourier version of the variational theory of complex rays for medium-frequency acoustics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 225, 142–153.