

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Génération acoustique par micro-ondes pour le contrôle non destructif des plaques minces

Abderemane Mohamed Elarif, Christophe Bacon

Université de Bordeaux, Laboratoire de Mécanique Physique, UMR CNRS 5469
351 Cours de la Libération, 33405 Talence, Cedex, {a.mo-elarif,c.bacon}@lmp.u-bordeaux1.fr

Le présent travail vise à étudier les vibrations engendrées dans le plan radial des plaques viscoélastiques isotropes minces soumises à une élévation locale de la température induite par une source de micro-ondes. Son objectif principal est de proposer des outils permettant à court terme d'élaborer une méthode de contrôle non destructive (CND). Il est admis que la génération acoustique par micro-ondes dans les matériaux diélectriques est liée à la distribution spatiale du champ de température. Par conséquent, la connaissance de son expression analytique permet généralement, grâce à un modèle thermoélastique, de déterminer théoriquement ou numériquement (par éléments finis) les expressions ou la forme des ondes acoustiques générées. Cependant, une telle démarche peut s'avérer être difficile dans la mesure où il faut résoudre analytiquement ou numériquement d'une part les équations de Maxwell en coordonnées cylindriques afin de déterminer la puissance électromagnétique absorbée et d'autre part l'équation de la chaleur. De ce fait, nous allons d'abord simplifier le problème en supposant que l'absorption des micro-ondes induit au moins dans l'échantillon une répartition uniforme de la température. Puis une méthode inverse sera ensuite mise au point pour estimer la surface du disque subissant l'échauffement thermique. Ainsi cette nouvelle donnée pourra être utilisée par la suite pour élaborer la méthode de CND via la technique de génération acoustique par micro-ondes.

1 Introduction

Tout au long de ces dernières années, l'étude de nouvelles techniques de contrôle non destructif n'a cessé de progresser. Ceci a favorisé l'émergence de plusieurs méthodes actuellement utilisées dans l'industrie. Cependant, notre objectif sera de proposer puis d'étudier une nouvelle technique décrite dans les références [1, 3]. Celle-ci analyse les ondes acoustiques générées au sein d'un matériau diélectrique par une source de micro-ondes. Sa particularité par rapport aux méthodes traditionnelles comme les ultrasons est qu'elle est sans contact. De plus, contrairement au Laser, la génération acoustique n'est pas créée que sur la surface du matériau mais sur toute son épaisseur si le matériau absorbe peu les ondes électromagnétiques.

Par ailleurs, il est admis dans [3] que l'irradiation de micro-ondes sur un matériau diélectrique induit, par conversion d'énergie électromagnétique en énergie thermique, une brusque élévation de température. Celle-ci provoque, par effet de dilatation thermique, la génération des ondes acoustiques au sein du matériau. Évidemment, l'amplitude de ces vibrations mécaniques dépend non seulement des propriétés mécaniques, thermiques et électromagnétiques du matériau testé, mais aussi de la présence ou non d'un défaut dans la structure. De ce fait, Il est tout à fait possible d'appliquer cette nouvelle technique pour contrôler les plaques minces présentant des défauts de formes géométriques simples. L'idée vient du fait qu'un dispositif expérimental utilisant la technique de génération par micro-ondes peut être conçu d'une façon que l'échantillon testé serait contrôlé en déplaçant la source de micro-ondes sur

toute sa surface. Cependant, la mise en place de cette stratégie implique d'abord une bonne compréhension des phénomènes thermoélastiques mises en jeu.

Les vibrations radiales générées au sein des disques minces (trouées ou non) soumis à une élévation de température ont été étudiées dans de nombreuses revues scientifiques [1, 2] et [4, 9]. Ce travail est une extension des résultats obtenus dans la référence [1] où l'échauffement du disque est supposé être uniforme sur tout son volume. Évidemment ceci est une approximation grossière puisque la plaque ne subit généralement un flux thermique que dans un voisinage de la source. Par suite, avant d'entamer toute initiative d'élaboration d'une méthode de contrôle exploitant ce phénomène, il est important de caractériser cette zone.

Pour cela, nous allons simplifier l'étude en supposant que la distribution locale de la température est uniforme dans une zone restreinte notée S_{th} puis nulle ailleurs. Une telle hypothèse permet d'exhiber les expressions analytiques simples des vibrations radiales. Ensuite les modèles qui y seront développés serviront par la suite à estimer non seulement, par une méthode inverse, la zone chauffée par la source de micro-ondes, mais aussi à élaborer une méthode de contrôle non destructif des plaques minces.

2 Théorie

2.1 Équation des vibrations radiales

Dans cette partie, nous allons considérer un disque circulaire mince (de rayon R_2) fait d'un matériau viscoélastique isotrope de coefficient de Poisson ν et de

coefficient de dilatation thermique α . Il est soumis à une élévation de température uniforme sur une zone S_{th} centrée sur le disque de rayon R_{th} . En faisant l'hypothèse d'un état de contrainte plane et d'un champ de déplacement $\mathbf{u}$ purement radial, nous montrons que le déplacement radial u_r satisfait dans le domaine de Fourier à l'équation:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \left(k_L^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_r = B \frac{\partial \tilde{\theta}(r, \omega)}{\partial r} \quad (1)$$

où : ω est la pulsation,
 ρ est la masse volumique,
 B est une constante donnée dans [1],
 Q_{11} est la première composante de la matrice de rigidité réduite donnée dans [1],
 k_L est le nombre d'onde des ondes acoustique radiales donnée dans [1].

Étant donné que l'élévation de température n'est uniforme que sur le disque de rayon R_{th} , alors son expression peut analytiquement s'écrire à l'aide de la fonction d'Heaviside H suivant la relation (2) :

$$\tilde{\theta}(r, \omega) = T_0 \tilde{f}(\omega) H(R_{th} - r) \quad (2)$$

où : T_0 est l'amplitude maximum de l'élévation de température,
 $\tilde{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier de l'évolution temporelle de la température. Son expression est donnée dans [1].

En intégrant la dérivée de (2) dans (1), nous remarquons que le déplacement radial u_r vérifie dans le domaine de Fourier une équation d'Helmholtz inhomogène d'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \left(k_L^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_r = A(\omega) \delta(R_{th} - r) \quad (3)$$

où : $A(\omega) = T_0 \tilde{f}(\omega) B$
 $\delta(R_{th} - r)$ est la fonction de Dirac.

La solution de (3) est généralement la somme d'une solution homogène formée par la combinaison linéaire des fonctions de Bessel de la première et seconde espèces d'ordre 1 : $J_1(k_L r)$ et $Y_1(k_L r)$, et d'une solution particulière u_{rp} . Dans la suite, nous choisissons de résoudre l'équation 3 d'abord dans le cas d'un anneau car il permettra par la suite de déterminer les expressions des vibrations radiales des plaques circulaires pleines ou trouées, finies ou infinies. Par exemple, l'étude du disque plein se déduit de celle de l'anneau en tendant le rayon intérieur de ce dernier vers 0. Quant à celle de la plaque trouée infinie, il suffira de tendre le rayon extérieur de l'anneau vers l'infini. De plus, ce modèle permettra aussi par la suite d'étudier la faisabilité de la méthode de contrôle non destructif des plaques minces.

2.2 Déplacement radial dans le cas de l'anneau

Nous étudions dans cette partie les déplacements radiaux d'un anneau soumis localement à une distribution de température uniforme sur la zone S_{th} comme cela est illustré sur la Figure 1.

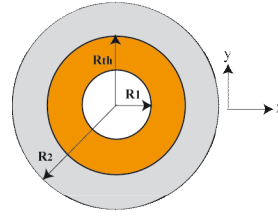


Figure 1: Schéma simplifié de l'anneau soumis à une élévation locale et uniforme de la température.

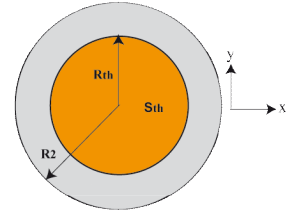


Figure 2: Schéma simplifié du disque plein soumis à une élévation locale et uniforme de la température.

Compte tenu de la présence du trou circulaire au centre de l'anneau, la solution homogène de l'équation (3) sera effectivement une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de la première et seconde espèces d'ordre 1. Par ailleurs, en utilisant les propriétés de l'équation (3) et des fonctions de Bessel, nous avons pu expliciter une expression analytique simple de la solution particulière u_{rp}^A . Celle-ci est donnée par la relation (4) :

$$\tilde{u}_{rp}^A = [\gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r)] H(R_{th} - r) \quad (4)$$

où : $2\gamma_1 = \pi R_{th} A(\omega) Y_1(k_L R_{th})$
 $2\gamma_2 = -\pi R_{th} A(\omega) J_1(k_L R_{th})$

Par conséquent le champ de déplacement radial théorique peut s'exprimer généralement sous la forme (5) :

$$\tilde{u}_r(r) = \beta_1 J_1(k_L r) + \beta_2 Y_1(k_L r) + \tilde{u}_{rp}(r) \quad (5)$$

où les coefficients β_1 et β_2 seront déterminés par une formulation analytique des conditions aux limites imposées sur les frontières de l'anneau.

Étant donnée que celles-ci sont supposées être libres de toute contrainte sur ses parois internes et externes, alors la contrainte radiale doit y être nulle. Ainsi en utilisant l'expression (6) de la contrainte radiale :

$$\tilde{\sigma}_r = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \tilde{u}_r - (1 + \nu) \alpha \tilde{\theta} \quad (6)$$

et en effectuant tous les calculs, la formulation de la condition aux limites sur la contrainte radiale conduit à la résolution d'un système d'équations (7) d'inconnues β_1 et β_2 .

$$\begin{cases} \beta_1 E_1(R_1) + \beta_2 E_2(R_1) = D(R_1) \\ \beta_1 E_1(R_2) + \beta_2 E_2(R_2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où : $E_1(r) = -k_L J_2(k_L r) + \left(\frac{k_L + \nu}{r} \right) J_1(k_L r)$
 $E_2(r) = -k_L Y_2(k_L r) + \left(\frac{k_L + \nu}{r} \right) Y_1(k_L r)$

$$D(r) = (1 + \nu) \alpha T_0 f(\omega) - C'(r) - \left(\frac{\nu}{r}\right) C(r)$$

$$C(r) = \gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r)$$

Les calculs montrent que les solutions du système d'équations (7) sont données par les expressions (8).

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{E_2(R_2)D(R_1)}{E_1(R_2)E_2(R_1) - E_1(R_1)E_2(R_2)} \\ \beta_2 &= \frac{E_1(R_2)D(R_1)}{E_1(R_2)E_2(R_1) - E_1(R_1)E_2(R_2)} \end{aligned} \quad (8)$$

La détermination de ces constantes permet, grâce à l'équation (5), d'exprimer théoriquement le déplacement radial de l'anneau.

2.3 Déplacement radial dans le cas d'un disque plein

Considérons ici le cas d'un disque plein mince soumis localement à une élévation uniforme de la température comme cela est illustré sur la Figure 2. Contrairement au cas de l'anneau où l'étude du déplacement radial au centre a pu être évitée à cause de la présence du trou, l'étude du disque plein doit tenir compte du fait que les vibrations radiales doivent être d'amplitude finie au centre. Par conséquent, la solution homogène de l'équation (3) sera formée seulement par la fonction de Bessel de la première espèce d'ordre 1 $J_1(k_L r)$ puisque la fonction $Y_1(k_L r)$ tend vers l'infini quand son argument tend vers 0. En outre, il est aisé de montrer qu'une solution particulière satisfaisant l'équation (3) et qui permet par la suite d'exploiter la condition aux limites sur la frontière externe du disque peut s'exprimer sous la forme indiquée par l'équation (9).

$$\tilde{u}_r^D = [\gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r)] H(r - R_{th}) \quad (9)$$

Ainsi le champ de déplacement radial s'exprime sous la forme donnée par la relation (10) où la constante β sera obtenue par la nullité de la contrainte radiale sur la frontière externe du disque.

$$\tilde{u}_r^D(r) = \beta J_1(k_L r) + \tilde{u}_r^D(r) \quad (10)$$

Comme dans le cas de l'anneau, nous supposons que la frontière externe du disque est libre de toute contrainte extérieure. En faisant de même que dans le cas précédent, nous montrons que celle-ci s'écrit sous la forme indiquée par la relation (11).

$$\beta = -\left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{E_2(R_2)}{E_1(R_2)} \right] \quad (11)$$

2.4 Validation numérique des modèles théoriques

Les modèles développés ici sont comparés à ceux obtenus par éléments finis. La simulation numérique du problème thermoélastique est faite en utilisant le logiciel d'éléments finis Comsol et en effectuant le maillage et les

calculs numériques que sur un quart de l'échantillon comme cela est illustré sur la Figure (3).

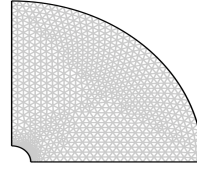


Figure 3: Maillage sur un quart de l'anneau.

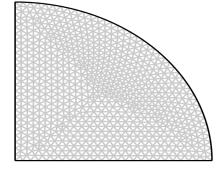


Figure 4: Maillage sur un quart du disque.

Toutefois, une telle initiative implique nécessairement de trouver les bonnes conditions aux limites à appliquer sur les plans $x = 0$ et $y = 0$ où les différents champs mécaniques doivent respecter les conditions de symétries. Or, étant donné que le problème est symétrique, cette condition se fait généralement en imposant une condition de symétrie plane sur ces deux plans. Pour y parvenir, nous avons dû utiliser le module « plane stress » contenu dans la bibliothèque de Comsol pour prédire numériquement par éléments finis les vibrations radiales de l'anneau et du disque. Le choix de celui-ci est motivé par le fait que ce module permet effectivement d'appliquer ce type de condition. Notons aussi qu'une telle démarche permet de réduire considérablement le temps de la résolution numérique du problème thermoélastique.

L'échantillon testé numériquement ici est fait d'un matériau viscoélastique isotrope de module de Young complexe $E^* = 3,84 + 0,17i \text{ GPa}$, de coefficient de Poisson vaut $\nu = 0,42$, de masse volumique $\rho = 1380 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de coefficient de dilatation thermique $\alpha = 8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. En outre, pour simplifier, nous admettons qu'il subit localement une source d'excitation correspondant à une impulsion de micro-ondes induisant localement sur le disque de rayon $R_{th} = 23 \text{ mm}$ une élévation uniforme de la température. Par ailleurs, l'échantillon est maillé numériquement en utilisant des éléments triangulaires, linéaires comme l'indique la Figure 3. La discrétisation comporte, par exemple pour le cas de l'anneau, un nombre d'éléments égal à 942, soit un nombre de degrés de liberté égal à 6706.

La Figure 5 et la Figure 6 montrent dans chaque cas les comparaisons spectrales des vitesses radiales obtenues respectivement par le modèle analytique et numérique sur la gamme de fréquence allant jusqu'à 100 kHz. Notons que les résultats des deux modèles analytiques concordent bien avec ceux qui sont obtenus numériquement. Ces résultats permettent de valider numériquement les deux modèles théoriques ainsi construits.

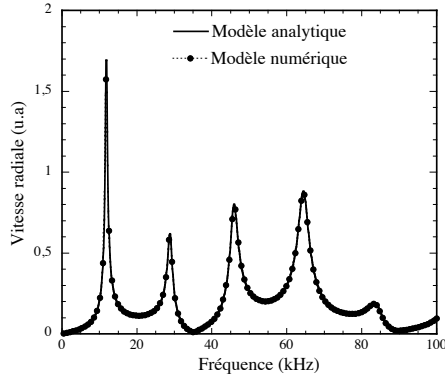


Figure 5 : Comparaisons des spectres des vitesses radiales obtenues par le modèle théorique et numérique (Anneau).

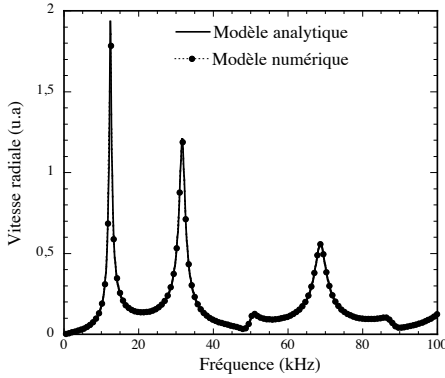


Figure 6 : Comparaisons des spectres des vitesses radiales obtenues par le modèle théorique et numérique (Disque).

Comme l'objet de cette étude est d'estimer la zone S_{th} , alors nous allons utiliser le modèle du disque plein pour élaborer une méthode inverse afin de caractériser la taille de cette zone.

2.5 Effet de S_{th} sur le spectre des vibrations radiales

Il est tout à fait naturel de penser que l'amplitude des différents modes de vibrations du disque sera intrinsèquement liée à la dimension de la zone S_{th} . Ceci est illustré par la Figure 7 qui montre pour différentes valeurs du rayon R_{th} l'évolution des amplitudes du spectre des vitesses théoriques radiales normalisées et mesurées sur l'extrémité du disque plein. Nous remarquons que les amplitudes normalisées du second et troisième modes de vibrations évoluent différemment suivant les valeurs de R_{th} , c'est à dire suivant la taille de la zone S_{th} . Par conséquent, le spectre de la vitesse radiale dépend non seulement des paramètres mécaniques et thermiques du matériau composant le disque, mais aussi au rayon R_{th} . C'est un résultat important qui suggère implicitement que l'estimation de la zone S_{th} pourra se faire en procédant à une formulation d'un problème inverse. Celle-ci s'appuie sur la recherche des paramètres de calage entre le modèle théorique donnée par l'équation (10) et les résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif expérimental décrit un peu plus loin.

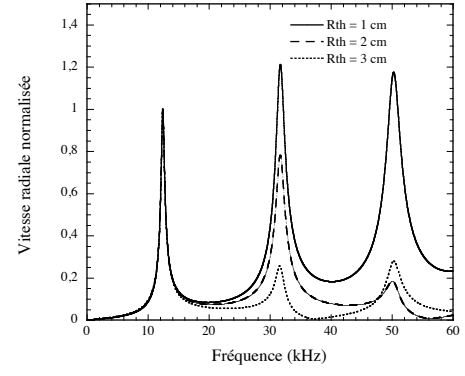


Figure 7 : Spectres des vitesses radiales obtenues par le modèle théorique pour différentes zones de chauffage.

2.6 Formulation du problème inverse

La méthode inverse que nous allons utiliser dans cette partie sera basée sur la minimisation de la fonctionnelle $J(p)$ définie par l'expression (13). Nous chercherons les paramètres qui optimisent dans le domaine de Fourier les écarts entre les valeurs prédites de l'accélération radiale théorique $acc_r^{Th}(p, f)$ et celle obtenue expérimentalement $acc_r^{Exp}(f)$. Le choix de l'accélération par rapport à la vitesse provient du fait qu'en pratique les vibrations radiales du disque seront mesurées à l'aide d'un accéléromètre.

$$J(p) = \frac{1}{N} \sum_f \|acc_r^{Exp}(f) - acc_r^{Th}(p, f)\| \quad (12)$$

Pour simplifier, nous intéresserons à l'estimation du vecteur $p = (E', E'', \nu, R_{th})$ formé par la partie réelle E' et imaginaire E'' du module de Young complexe E^* , du coefficient de Poisson ν et du rayon thermique R_{th} . Quant aux autres paramètres, leurs valeurs seront prises égales à $\rho = 1380 \text{ kg.m}^{-3}$ pour la masse volumique et à $\alpha = 8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ pour le coefficient de dilatation thermique. Par ailleurs, le calcul théorique du spectre de l'accélération radiale se déduit du calcul du déplacement radial par la relation $\tilde{a}_r = -\omega^2 \tilde{u}_r$. Les paramètres optimaux qui permettent de minimiser la fonction $J(p)$ sont généralement ceux qui décrivent au mieux les propriétés du matériau et la distribution de la température.

3 Dispositif expérimental

Comme l'indique la Figure 8, l'échantillon testé expérimentalement est composé d'un disque de rayon $R_2 = 50 \text{ mm}$ et d'épaisseur $e = 5 \text{ mm}$. Ce disque est soumis à une excitation de micro-onde générée par un magnétron. Ce dernier est contrôlé par un générateur de fonction (GDF) qui permet l'envoi d'une salve de 10 impulsions via un guide d'onde rectangulaire circulaire. Celui-ci permet de faire propager d'une part grâce au guide rectangulaire le mode fondamental TE_{10} et d'autre part grâce au guide circulaire le mode fondamental TE_{11} . L'irradiation de micro-ondes provoque localement au sein de l'échantillon placé à 3mm de l'extrémité du guide une élévation rapide

de la température. Nous supposons que celle-ci est uniforme sur une zone localisée au voisinage de la zone d'irradiation. Cette température induit, grâce au phénomène de conversion thermo acoustique, des déformations radiales. Celles-ci sont mesurées à l'aide d'un accéléromètre de masse 0,2 g, utilisable dans la gamme de fréquence située en dessous de la fréquence de 90 kHz. Un tel capteur permet d'acquérir des signaux propres que ceux qui seraient mesurés à l'aide le vibromètre laser. De plus, du fait de sa masse très légère, l'effet de son impédance acoustique sur les variations des fréquences de résonance radiale du disque peut être négligé. La réponse temporelle acquise par ce capteur est alors envoyée à une chaîne d'acquisition permettant non seulement de filtrer et d'amplifier le signal, mais aussi d'obtenir son spectre en effectuant une transformée de Fourier. La Figure 9 montre le spectre de l'accélération obtenue. Il est normalisé par rapport à l'amplitude maximale du mode fondamental indiqué par le premier pic et il a été obtenu avec un pas (en fréquence) environ égal à 6Hz. Nous supposons que celui-ci est suffisant pour obtenir une bonne précision des amplitudes maximales atteintes par chaque pic.

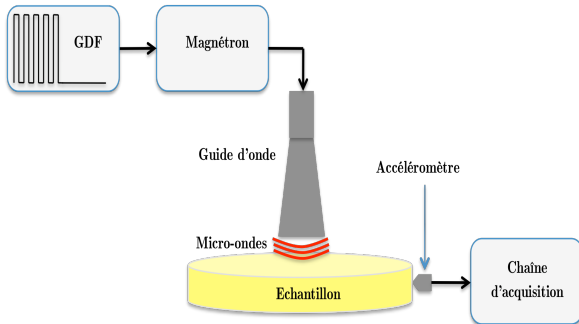


Figure 8: Schéma simplifié du montage expérimental

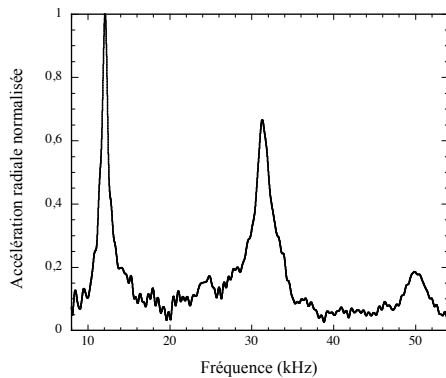


Figure 9 : Spectre de l'accélération radiale expérimentale normalisée.

4 Résultats et discussion

La minimisation de la fonctionnelle J sur les 7535 points expérimentaux permet d'obtenir sur le Tableau 1 les estimations des paramètres optimaux.

E' (GPa)	E'' (GPa)	ν	R_{th} (mm)
3,75 ($\pm 0,10$)	0,2 ($\pm 0,05$)	0,42 ($\pm 0,03$)	19 (± 2)

Tableau 1: Estimations des paramètres.

En comparant sur la Figure 10 le spectre de l'accélération théorique obtenue avec ces estimations et celle obtenue expérimentalement, nous remarquons une bonne concordance malgré la présence de certaines variations. Celles-ci sont peut-être dues principalement à la non uniformité de la distribution de la température sur la zone S_{th} . Toutefois les estimations obtenues notamment pour la partie réelle et la partie imaginaire du module de Young sont très proches de celles présentes dans la référence [9].

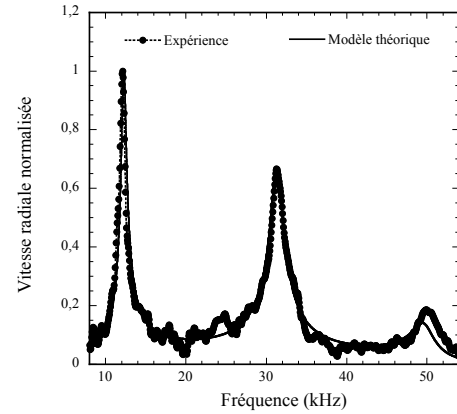


Figure 10: Comparaison de l'accélération théorique obtenue avec les paramètres optimaux et celle de l'expérience.

5 Conclusion

L'étude des vibrations radiales des anneaux et des disques minces soumis localement à une distribution uniforme de la température a été étudiée théoriquement dans ce travail. Dans l'hypothèse où la conversion de l'énergie des micro-ondes en énergie thermique induisait une élévation uniforme de la température sur le disque, le modèle analytique (11) nous a permis d'estimer grâce à une méthode inverse la zone qui subirait l'échauffement uniforme de la température. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre le modèle analytique et les résultats expérimentaux. Cependant, la comparaison du spectre théorique et expérimental révèle quelques variations dues à la non prise en compte réelle de la distribution de la température sur le disque. Il serait donc important d'étendre les résultats obtenus ici pour une autre forme de température puis comparer les résultats avec ceux qui sont obtenus ici afin de valider cette hypothèse.

Cependant, les résultats obtenus peuvent être utilisés pour analyser le phénomène de génération acoustique d'un trou subissant un échauffement rapide de la température. Pour cela, étant donné de l'estimation de la zone S_{th} , il suffit d'utiliser le modèle théorique (5) pour analyser le comportement de la réponse temporelle au niveau du trou. Une telle initiative permettrait de proposer une méthode pour dimensionner par exemple la taille du trou.

Références

- [1] Hadj Henni A. R., Bacon C., "In-plane vibration of thin circular structures submitted to uniform pulsed microwave irradiations", *J. Acoust. Soc. Am.* 119, 3782-3792 (2006).

- [2] Hadj Henni A. R., Bacon C., "In-plane vibration of thin elliptic plates submitted to uniform pulsed microwave irradiations", *J. Sound. and Vibration* 299, 298-313 (2007)
- [3] Bacon C., Guilliorit, Hosten B., "Acoustic wave generated by pulsed microwaves in viscoelastic rods : modeling and experimental verification", *J. Acoust. Soc. Am.* 110, 1398-1407 (2001).
- [4] Boley B. A., Weiner J. H., "Theory of thermal stresses", *New York: John Wiley and Sons*, (1960).
- [5] Biswas P., " Non-linear free vibrations of heated elastic plates", *Indian J. Pure appl. Math.*, 1199-1203 (1983).
- [6] Ishihara M., Noda N., "Theoretical analysis of thermoelastoplastic déformation of a circular plate due to a partially distributed heat supply", *J. Thermal Stress* 20, 203-225 (1997).
- [7] Gaikwad M. N., Deshmukh K. C., "Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate", *Applied Mathematical Modelling*, 29, 797-804 (2005).
- [8] Yuxin S., Hironori T., "Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circular plate resonators", *J. Sound and Vibration* 319, 392-405 (2009).
- [9] Yuxin S., Hironori T., "Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circular plate resonators", *J. Sound and Vibration* 319, 392-405 (2009).