

Sur la convergence de la série de Debye représentant les réflexions successives d'une onde ultrasonore dans une plaque élastique anisotrope immergée

Éric Ducasse^{1,2,3}, Marc Deschamps^{2,3}

¹ Arts et Métiers ParisTech ; CER de Bordeaux-Talence, Esplanade des Arts et Métiers, F-33405 TALENCE Cedex

² Université Bordeaux 1 ; Laboratoire de Mécanique Physique, 351 cours de la Libération, F-33405 TALENCE Cedex

³ CNRS ; UMR 5469 (même adresse), {e.ducasse,m.deschamps}@lmp.u-bordeaux1.fr

La propagation d'ondes mécaniques dans une plaque plane élastique anisotrope horizontale insérée entre deux milieux semi-infinis (fluides, solides élastiques anisotropes ou vide) peut se modéliser en utilisant les séries de Debye, ce qui revient à considérer le champ total comme la superposition d'un champ incident engendré par une source et de ses réflexions successives aux deux interfaces. Ceci suppose que soient définies des ondes montantes et descendantes pour chaque fréquence et chaque vecteur d'onde réel dans le plan horizontal. Habituellement, ces ondes sont extraites de la base des solutions exponentielles (ondes planes) de l'équation d'ondes, et triées selon le signe de la composante verticale de la vitesse de groupe pour les solutions homogènes, et selon le signe de la partie imaginaire du nombre d'onde vertical pour les solutions évanescentes. Dans ce cas, la série de Debye peut diverger dès que la fréquence dépasse au moins une fréquence de coupure. Ce résultat surprenant s'explique par le fait que deux solutions évanescentes conjuguées (d'atténuations opposées) considérées séparément ne transmettent pas d'énergie dans le sens de l'épaisseur mais qu'en revanche, une combinaison des deux peut en transmettre en raison de l'existence d'un flux d'interaction. La conservation des flux d'énergie selon l'épaisseur nous amène à construire à partir de chaque couple d'ondes évanescentes conjuguées un nouveau couple d'ondes orthogonales, c'est-à-dire sans flux d'interaction, dont l'une a un flux d'énergie montant, et l'autre, descendant. Cette nouvelle base d'ondes montantes et descendantes est orthogonale au sens du flux vertical d'énergie, ce qui entraîne automatiquement une convergence de la série de Debye, en raison de la conservation de l'énergie. Ces ondes montantes et descendantes, construites à partir de deux ondes évanescentes conjuguées, présentent des particularités et soulèvent des problèmes qui seront détaillés lors de l'exposé.

1 Introduction

Le calcul de champs rayonnés au sein d'un guide peut être traité par une méthode multimodale. Cette technique est mise en défaut, d'une part, pour un guide enfoui ou immergé, et d'autre part, s'il s'agit d'obtenir la fonction de Green. En effet, dans ce dernier cas, le calcul de la propagation de discontinuités nécessite un nombre infini de modes guidés, alors que dans le premier cas, on est en présence d'un continuum de modes. Une alternative existe, consistant à développer la solution comme une somme infinie de multiples réflexions/réfractions [1] et connue sous le nom de série de Debye [2]. Utilisant cette décomposition, plusieurs auteurs ont obtenus des résultats intéressants pour des solides élastiques cylindriques [3, 4], pour des couches sphériques élastiques [5] ou pour des plaques planes élastiques [6, 7, 8]. L'esprit de la méthode pour obtenir aisément cette série est décrit en [5]. Cette décomposition, associée à un calcul intégral, est bien adaptée à un calcul de champs dans le domaine temporel en évitant le calcul des pôles associés aux modes guidés. À titre d'exemple, à la référence [9], on trouvera ce type de calcul par la méthode Cagniard-de Hoop.

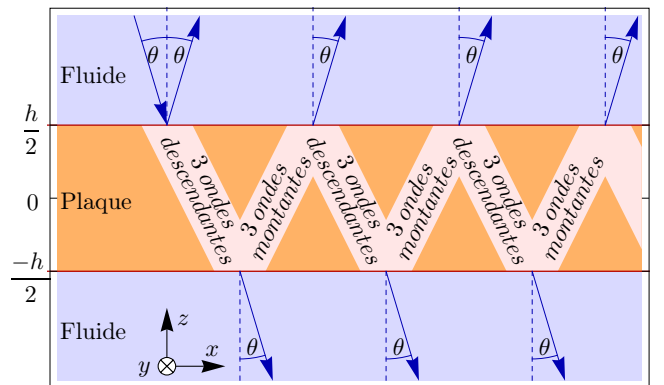


FIG. 1: Plaque anisotrope immergée insonifiée par une onde plane harmonique d'angle d'incidence θ .

Malheureusement, comme illustré en [6] pour l'exemple de la réflexion/réfraction d'une onde plane sur une lame solide isotrope immergée dans un fluide, cette série ne converge pas nécessairement. Ceci est lié à la présence de modes évanescents dans la plaque. Afin d'expliquer et de corriger cette divergence, l'objet de cette communication est de reprendre cette étude. On montre alors que la réécriture du problème dans la base orthogonale for-

mée par une combinaison de ces ondes fournit un cadre correct pour la formulation en série, dont la convergence est ainsi assurée quelle que soit la situation. Après avoir repris au §2 la mise en équation sous forme de série de Debye dans le cas usuel, on établit au §3 une série de Debye différente, dont la somme reste la même, mais qui converge. Enfin, des courbes numériques illustrent nos résultats théoriques au §4.

2 Représentation du problème

2.1 Représentation des champs

Une plaque anisotrope immergée est insonifiée par une onde plane harmonique incidente de pulsation ω et de célérité c dans le fluide au-dessus de la plaque (cf. Fig. 1). La verticale z et la direction de l'onde incidente, dans le plan xz , forment l'angle d'incidence θ . La plaque mise en vibration renvoie dans le fluide des champs réfléchi, au-dessus de la plaque, et transmis, en-dessous. La composante horizontale de la lenteur $s = \sin(\theta)/c$ étant commune, tout comme la pulsation, à toutes les ondes en présence en raison des lois de Snell-Descartes, les différents champs s'écrivent comme suit :

2.1.1 Champs incident et réfléchi

Le champ de pression dans le fluide au-dessus de la plaque s'écrit :

$$\left(\underbrace{a_{\text{inc}} e^{i\omega\zeta(z-\frac{h}{2})}}_{p_{\text{inc}}(z)} + \underbrace{a_{\text{réf}} e^{-i\omega\zeta(z-\frac{h}{2})}}_{p_{\text{réf}}(z)} \right) e^{i\omega(t-sx)}, \quad (1)$$

où h est l'épaisseur de la plaque et $\zeta = \cos(\theta)/c$, la lenteur selon l'axe z .

2.1.2 Vibration de la plaque

L'état vibratoire de la plaque est caractérisé par :

$$\mathbf{U}(z) e^{i\omega(t-sx)}, \quad (2)$$

où le vecteur $\mathbf{U}(z)$ est le vecteur de dimension six qui contient les trois composantes du vecteur vitesse et les trois composantes de la contrainte verticale. Ce vecteur peut se décomposer sur la base de six ondes planes (e.g. [10, 11, 12, 13]),

$$\mathbf{n}_\alpha(z) = \exp(-i\omega\zeta_\alpha z) \boldsymbol{\xi}_\alpha, \quad (3)$$

sous la forme :

$$\mathbf{U}(z) = \sum_{\alpha=1}^6 a_\alpha \mathbf{n}_\alpha(z) = \underbrace{\boldsymbol{\Xi} \mathcal{E}(z)}_{\mathcal{N}(z)} \mathbf{a}. \quad (4)$$

$\mathbf{a}$ est le vecteur des six composantes a_α . La matrice diagonale $\mathcal{E}(z) = \text{diag}(\exp(-i\omega\zeta_\alpha z))$ contient les six lenteurs réelles ou complexes ζ_α , les colonnes de la matrice $\boldsymbol{\Xi}$ étant les polarisations $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ correspondantes.

2.1.3 Champ transmis

Le champ de pression au-dessous de la plaque ne contient qu'une onde transmise se propageant selon les z décroissants :

$$\underbrace{a_{\text{tr}} e^{i\omega\zeta(z+\frac{h}{2})}}_{p_{\text{tr}}(z)} e^{i\omega(t-sx)}. \quad (5)$$

2.2 Raccordement et résolution directe

Le champ incident, connu, est caractérisé par le coefficient a_{inc} . Il faut déterminer les coefficients $a_{\text{réf}}$, a_{tr} et le vecteur $\mathbf{a}$, soient 8 inconnues, grâce à la continuité des contraintes et déplacements normaux aux interfaces supérieure :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{N}\left(\frac{h}{2}\right) \mathbf{a} = a_{\text{inc}} \begin{pmatrix} -\zeta/\rho \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{\text{réf}} \begin{pmatrix} \zeta/\rho \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ρ étant la masse volumique du fluide, et inférieure :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{N}\left(\frac{-h}{2}\right) \mathbf{a} = a_{\text{tr}} \begin{pmatrix} -\zeta/\rho \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

On a un système linéaire 8×8 à résoudre, ce qui ne pose pas de problème sauf s'il n'est pas inversible. Cela survient lorsqu'il existe au moins un mode de plaque non rayonnant vers le fluide (onde SH pour le cas isotrope par exemple). Le nombre d'inconnues est alors réduit aux ondes dans la plaque réellement excitées par l'onde incidente.

D'autre part, notons que lorsqu'on excite la plaque au voisinage de l'un des ses modes de Lamb dans le vide, on est sur une quasi-singularité.

Pour comprendre la formation de ces modes dans le domaine physique (spatio-temporel), nous considérons ici les champs comme le résultat des réflexions/transmissions successives aux deux interfaces.

2.3 Formulation en série de Debye

2.3.1 Ondes montantes et descendantes

Dans la plaque, la base des six solutions peut se décomposer en trois solutions «montantes» et en trois solutions «descendantes».

Si la lenteur ζ_α est réelle, alors on peut prendre une polarisation $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ normalisée réelle telle que le flux vertical surfacique moyen de puissance (dénommé « flux » dans la suite) est donné par la troisième composante du vecteur de Poynting $\boldsymbol{\xi}_\alpha^+ \mathcal{J} \boldsymbol{\xi}_\alpha = \boldsymbol{\xi}_\alpha^T \mathcal{J} \boldsymbol{\xi}_\alpha$ (les exposants T et $+$ désignent respectivement le transposé et le conjugué du transposé), lequel valant 1 si l'onde est montante et -1 si l'onde est descendante. La matrice $\mathcal{J}$ est définie par blocs :

$$\mathcal{J} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

où les matrices carrées $\mathbb{I}_3$ et $\mathbb{O}_3$ d'ordre 3 sont respectivement les matrices «identité» et «nulle». Le nombre $2r$

de lenteurs réelles étant forcément pair, il est bien connu que r ondes sont montantes et autant sont descendantes (topologie de la surface de lenteur), à condition de se placer hors du cas où la normale à la surface de lenteur est dans le plan xy ($\xi_\alpha^T \mathcal{J} \xi_\alpha = 0$), ce que est supposé ici.

Si la lenteur ζ_α a une partie imaginaire non nulle, alors le flux $\xi_\alpha^+ \mathcal{J} \xi_\alpha$ est nul mais on peut choisir pour normaliser $\mathbf{n}_\alpha(z)$ la polarisation ξ_α de sorte que $\xi_\alpha^T \mathcal{J} \xi_\alpha = 1$ [12]. D'autre part, le conjugué $\mathbf{n}_\alpha^*(z)$ fait également partie de la base des solutions. Dans ce cas, l'onde considérée comme montante est celle dont la partie imaginaire de la lenteur est négative, et l'onde considérée comme descendante, sa conjuguée.

(a)

Numéro	Lenteur	Normalisation
$1 \leq \alpha \leq r$	ζ_α réelle	$\xi_\alpha^+ \mathcal{J} \xi_\alpha = 1$
$r < \alpha \leq 3$	$\text{Im}(\zeta_\alpha) < 1$	$\xi_\alpha^T \mathcal{J} \xi_\alpha = 1$
$4 \leq \alpha \leq 3 + r$	ζ_α réelle	$\xi_\alpha^+ \mathcal{J} \xi_\alpha = -1$
$3 + r < \alpha \leq 6$	$\zeta_\alpha = \zeta_{\alpha-3}^*$	$\xi_\alpha = \xi_{\alpha-3}^*$

(b)

r	3	2
$\Xi^+ \mathcal{J} \Xi$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

r	1	0
$\Xi^+ \mathcal{J} \Xi$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

TAB. 1: Numérotation (a) et normalisation (b) de la base des solutions dans la plaque.

On peut donc arbitrairement ordonner et normaliser la base des solutions tel qu'indiqué dans le Tableau 1 [12]. Le flux s'exprime alors en fonction des composantes a_α du vecteur $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}^+ \mathcal{H} \mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^r |a_\alpha|^2 - \sum_{\alpha=4}^{3+r} |a_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=r+1}^3 (a_\alpha a_{\alpha+3}^* + a_\alpha^* a_{\alpha+3}), \quad (9)$$

où la matrice hermitienne $\mathcal{H} = \mathcal{N}(z)^+ \mathcal{J} \mathcal{N}(z) = \Xi^+ \mathcal{J} \Xi$ est indépendante de la position verticale z . Avec cette convention, on peut écrire la matrice $\mathcal{N}(z)$ comme la juxtaposition de deux matrices rectangulaires 6×3 de sorte que l'état de vibration dans la plaque se sépare en deux parties montante $\mathbf{U}_{\text{up}}$ et descendante $\mathbf{U}_{\text{down}}$:

$$\mathbf{U}(z) = \mathcal{N}(z) \mathbf{a} = \underbrace{\mathcal{N}_{\text{up}}(z) \mathbf{a}_{\text{up}}}_{\mathbf{U}_{\text{up}}(z)} + \underbrace{\mathcal{N}_{\text{down}}(z) \mathbf{a}_{\text{down}}}_{\mathbf{U}_{\text{down}}(z)}. \quad (10)$$

2.3.2 Réflexions/transmissions successives

À l'interface supérieure, l'onde incidente, caractérisée par le coefficient a_{inc} , produit une onde réfléchie, caractérisée par le coefficient $a_{\text{réf}}^{[0]}$, et une onde transmise descendant dans la plaque, caractérisée par le vecteur $\mathbf{a}_{\text{down}}^{[0]}$.

Cette dernière, incidente sur l'interface inférieure, produit une onde réfléchie montante ($\mathbf{a}_{\text{up}}^{[1]}$) dans la plaque et une onde transmise ($a_{\text{tr}}^{[1]}$) dans le fluide vers le bas. Et ainsi de suite comme résumé par le Tableau 2.

N°	incident	0	1	2	...	2n	2n+1	...
Fluide	a_{inc}	$a_{\text{réf}}^{[0]}$	—	$a_{\text{réf}}^{[2]}$	...	$a_{\text{réf}}^{[2n]}$	—	...
Plaque	—	$\mathbf{a}_{\text{down}}^{[0]}$	$\mathbf{a}_{\text{up}}^{[1]}$	$\mathbf{a}_{\text{down}}^{[2]}$	...	$\mathbf{a}_{\text{down}}^{[2n]}$	$\mathbf{a}_{\text{up}}^{[2n+1]}$	...
Fluide	—	—	$a_{\text{tr}}^{[1]}$	—	...	—	$a_{\text{tr}}^{[2n+1]}$	...

TAB. 2: Réflexions/transmissions successives dans la plaque anisotrope, vers le fluide.

La condition (6) de raccordement à l'interface du haut permet d'une part de déterminer le coefficient de réflexion initiale $r_{\text{réf}}^{[0]} = a_{\text{réf}}^{[0]}/a_{\text{inc}}$ et le vecteur $\mathbf{g}^{[0]} = \mathbf{a}_{\text{down}}^{[0]}/a_{\text{inc}}$ de transmission initiale vers la plaque, et d'autre part la matrice $\mathcal{R}_h$ et le vecteur $\mathbf{t}_h$ tels que :

$$\mathbf{a}_{\text{down}}^{[2n]} = \mathcal{R}_h \mathbf{a}_{\text{up}}^{[2n-1]} \text{ et } a_{\text{réf}}^{[2n]} = \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{a}_{\text{up}}^{[2n-1]}. \quad (11)$$

La condition (7) de raccordement à l'interface du bas fournit de même la matrice $\mathcal{R}_b$ et le vecteur $\mathbf{t}_b$ tels que :

$$\mathbf{a}_{\text{up}}^{[2n+1]} = \mathcal{R}_b \mathbf{a}_{\text{down}}^{[2n]} \text{ et } a_{\text{tr}}^{[2n+1]} = \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{a}_{\text{up}}^{[2n]}. \quad (12)$$

2.3.3 Écriture de la série de Debye

On en déduit l'écriture du coefficient de réflexion r de la plaque :

$$r = r_{\text{réf}}^{[0]} + \mathbf{t}_h \cdot \left\{ \left[\mathcal{R}_b \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{R}_h \mathcal{R}_b)^n \right] \mathbf{g}^{[0]} \right\}, \quad (13)$$

ainsi que de son coefficient de réfraction t vers le fluide du bas :

$$t = \mathbf{t}_b \cdot \left\{ \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{R}_h \mathcal{R}_b)^n \right] \mathbf{g}^{[0]} \right\}, \quad (14)$$

en série de Debye.

On peut démontrer facilement que si la série converge, alors ces coefficients r et t calculés correspondent bien à la solution du problème posé. Cependant, comme on va le voir dans la section suivante, contre toute attente, cette série ne converge pas toujours.

3 Conservation de l'énergie et convergence de la série

3.1 Divergence observée dans la base exponentielle

Si l'on utilise la base exponentielle décrite par l'Équation (3), la série converge obligatoirement si l'angle d'incidence reste en deçà du premier angle critique ($r=3$) pour des raisons de conservation d'énergie [6, 7] (cf. Éq. (9)). En revanche la série peut diverger lorsqu'on dépasse le premier angle critique [6] comme dans le cas isotrope décrit par la Figure 2. Le même type de comportement pour des plaques anisotropes est observé [14].

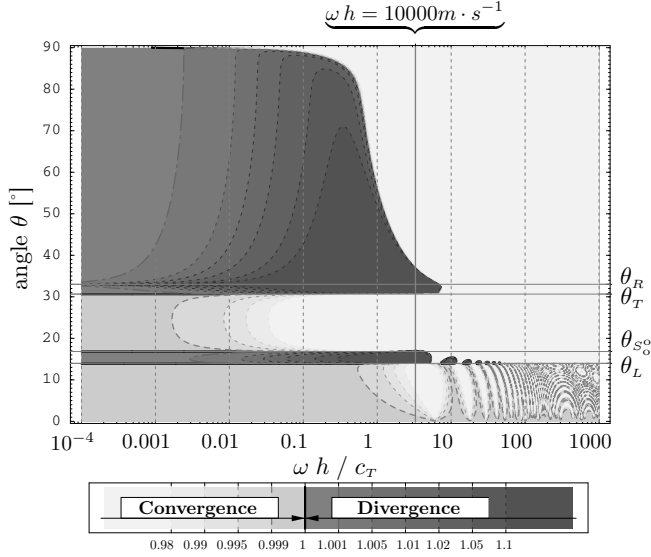


FIG. 2: Étude de convergence de la série de Debye pour une plaque d'aluminium immergée dans l'eau.

Aluminium : $c_T = 3040 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $c_L = 6420 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; Célérité de l'onde de Rayleigh $c_R \approx 2845 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; Célérité du mode S_0 à basses fréquences $c_{S_0} = 2c_T \sqrt{c_L^2 - c_T^2} / c_L \approx 5355 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; masse volumique $2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. **Eau** : $c = 1550 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Angles critiques $\theta_X = \arcsin(c/c_X)$.

La raison en est très simple : lorsque la base des solutions comprend un couple de solutions conjuguées $\mathbf{n}_\alpha(z)$ et $\mathbf{n}_{\alpha+3}(z) = \mathbf{n}_\alpha^*(z)$, l'Équation (9) et le Tableau 1 montrent que chaque onde prise séparément ne transporte pas d'énergie alors que toute combinaison avec a_α et $a_{\alpha+3}$ non nuls en transporte. La conservation d'énergie n'étant plus assurée, la série de Debye peut diverger.

3.2 Convergence assurée dans une base orthogonale au sens du flux d'énergie

Pour assurer la convergence de la série de Debye, il suffit de changer de base en prenant comme *nouvelles ondes montante et descendante* :

$$\tilde{\mathbf{n}}_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{n}_\alpha(z) + \mathbf{n}_{\alpha+3}(z)) \quad (15)$$

et

$$\tilde{\mathbf{n}}_{\alpha+3}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{n}_\alpha(z) - \mathbf{n}_{\alpha+3}(z)) . \quad (16)$$

Un exemple simple d'onde montante dans le cas isotrope est donnée par la Figure 3.

Cette nouvelle base $\tilde{\mathcal{N}}(z)$ est orthogonale au sens de l'énergie puisque :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{N}}(z)^+ \mathcal{J} \tilde{\mathcal{N}}(z) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ -\mathbb{O}_3 & -\mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

et que le flux s'écrit en fonction des nouvelles composantes :

$$\tilde{\mathbf{a}}^+ \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{a}} = \sum_{\alpha=1}^3 |\tilde{a}_\alpha|^2 - \sum_{\alpha=4}^6 |\tilde{a}_\alpha|^2 , \quad (18)$$

indépendamment de la position de l'angle d'incidence par rapport au premier angle critique, ce qui assure

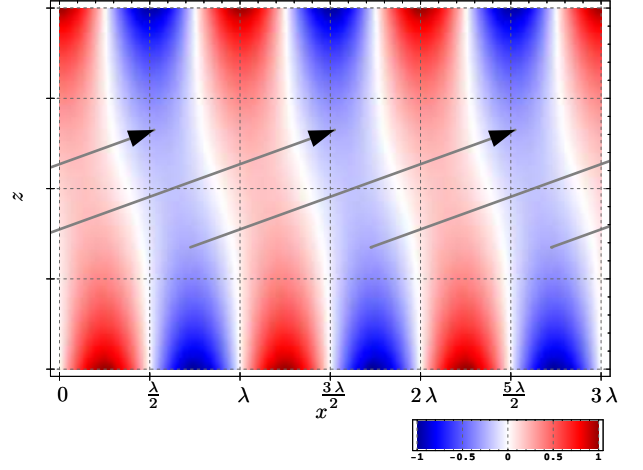


FIG. 3: Fronts d'une onde montante construite à partir de deux ondes hétérogènes conjuguées (cas isotrope).

la convergence de la série dans toutes les situations. Attention cependant : ce changement de base induit que les champs réfléchis successifs $\tilde{a}_{\text{réf}}^{[2n]}$ ne sont plus les mêmes bien que leur somme demeure inchangée. De même pour les champs transmis successifs $\tilde{a}_{\text{tr}}^{[2n+1]}$, la transmission initiale $\tilde{\mathbf{g}}^{[0]}$, les matrices de réflexion $\tilde{\mathcal{R}}_h$ et $\tilde{\mathcal{R}}_b$, les vecteurs de transmission $\tilde{\mathbf{t}}_h$ et $\tilde{\mathbf{t}}_b$.

4 Exemple du cas isotrope 2D

Pour ce cas d'école bien connu, l'onde SH n'intervient pas dans le problème. Il y a donc dans la plaque seulement deux ondes montantes L (ou P) et T (ou SV), et deux ondes descendantes. Moyennant la multiplication des éléments de la base de solutions par des coefficients complexes de module unitaire, les vecteurs de transmission sont identiques, ainsi les matrices de réflexion rendues symétriques ($r_{LT} = r_{TL}$), avec les notations :

$$\mathcal{R}_b = \mathcal{R}_h = \begin{pmatrix} r_{TT} & r_{LT} \\ r_{LT} & r_{LL} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{t}_b = \mathbf{t}_h = \begin{pmatrix} t_T \\ t_L \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{g}^{[0]} = \begin{pmatrix} g_T^{[0]} \\ g_L^{[0]} \end{pmatrix} . \quad (19)$$

À la Figure 4, les coefficients de réflexion r et de réfraction t (resp. Éqs. (13) et (14)) sont tracés en fonction de l'angle d'incidence pour un produit pulsation/épaisseur $\omega h = 10000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et avec les valeurs numériques données dans la Figure 2. Sur cette figure, les angles d'incidence particuliers associés aux deux angles critiques, θ_L et θ_T , sont identifiés. On précise aussi ceux associés aux modes de Lamb S_0 , A_0 et A_1 (dans le vide), et à l'onde de Rayleigh, θ_R . Dans toute cette section, on prendra pour tous les résultats présentés la même configuration.

Notons que le coefficient de réfraction est non nul après l'angle critique θ_T au-delà duquel toute onde au sein de la plaque est évanescence et donc ne transporte pas individuellement d'énergie d'une interface à l'autre. Le transfert d'énergie se fait alors par propagation des modes orthogonaux définis par l'Équation (16).

Afin d'étudier la divergence de la série, analysons les coefficients de réflexion et de réfraction aux interfaces 1

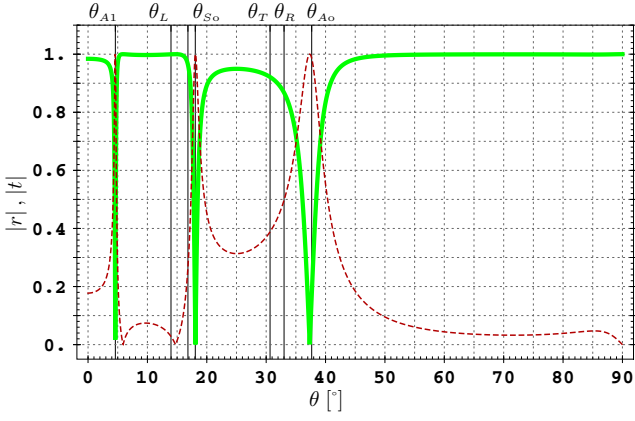


FIG. 4: Modules des coefficients de réflexion r (continu) et de transmission t (tirets) d'une plaque d'aluminium immergée dans l'eau obtenus par calculs directs.

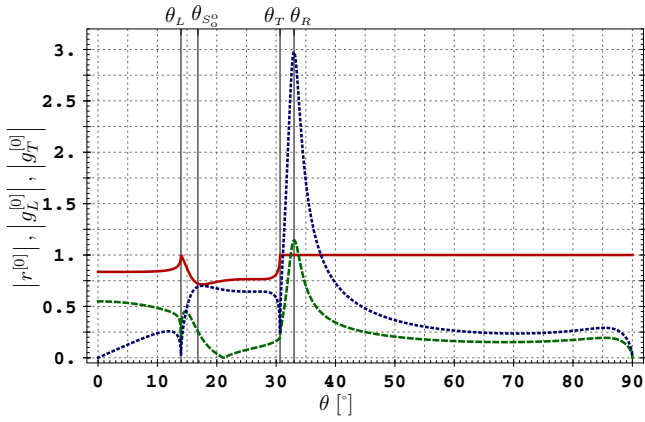


FIG. 5: Modules des coefficients de réflexion $r^{[0]}$ (continu) et de transmission $g_L^{[0]}$ (tirets) et $g_T^{[0]}$ (points) dans la base exponentielle.

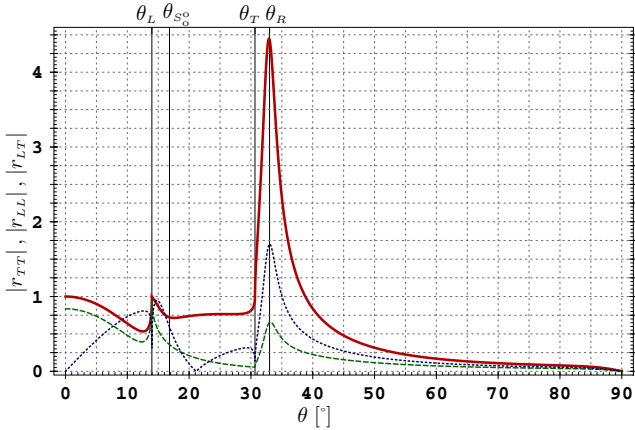


FIG. 6: Modules des coefficients de réflexion r_{TT} (continu), r_{LL} (tirets) et r_{LT} (points) dans la plaque, exprimés dans la base exponentielle.

et 2 (prises séparément) donnés par les Équations (11) et (12). La Figure 5 montre les coefficients associés à la réflexion/réfraction initiale de l'onde incidente avec la première interface; la Figure 6, ceux associés à la réflexion/réfraction des ondes longitudinale et transversale incidentes dans le solide sur chaque interface. Dans ce cas classique, l'équation d'énergie (9) ne permet pas de

montrer que les coefficients de réflexion/réfraction sont, en présence d'ondes évanescentes, de module inférieur à l'unité. Cela est lié à la présence, dans cette situation, du terme complexe d'interaction (terme de droite dans l'Équation (9)).

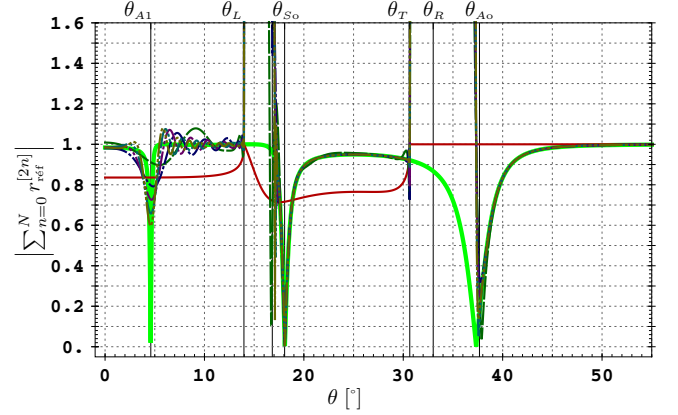


FIG. 7: Module de la somme des N premières réflexions $\sum_{n=0}^N r_{\text{réf}}^{[2n]}$, pour N variant de 0 à 25 avec un pas de 5, dans la base exponentielle.

Ceci joue un rôle important dans la non convergence de la série dans les Équations (13) et (14). C'est ce que l'on observe à la Figure 7, où la somme de cette série, donnant le coefficient de réflexion r de la plaque, est tracée pour les N premières réflexions/réfractions et pour différentes valeurs de N . Ce coefficient r , pour N infini, est tracé en vert très intense. En accord avec les calculs théoriques et les résultats numériques de la Figure 2, on observe bien la divergence de la série juste après les deux angles critiques θ_L et θ_T . D'autre part, il est intéressant de remarquer que, pour certains angles, la série converge lentement, cf. l'angle $\theta_{A1} \approx 4.5^\circ$ qui correspond au mode de Lamb A_1 .

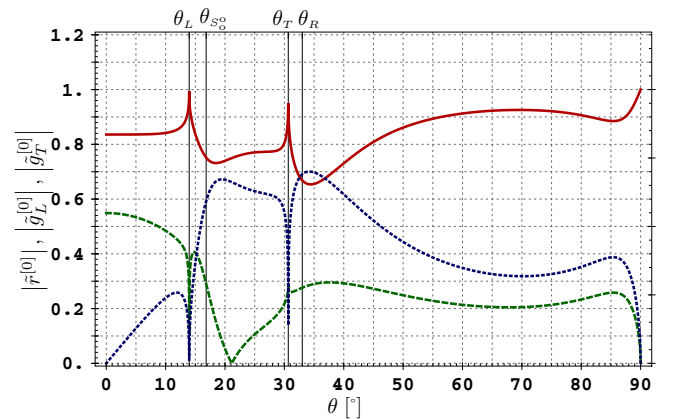


FIG. 8: Modules des coefficients de réflexion $\tilde{r}^{[0]}$ (continu) et de transmission $\tilde{g}_L^{[0]}$ (tirets) et $\tilde{g}_T^{[0]}$ (points) dans la base orthogonale.

La nouvelle formulation à partir des modes évanescentes orthogonaux, comme il a été démontré aux paragraphes précédents, résout ce problème de divergence. En effet, d'une part, tous les coefficients modifiés, symbolisés par l'ajout du signe tilde et présentés au §3.2, sont maintenant en module inférieurs à 1 en vertu des

nouvelles équations d'énergie (18). On peut l'observer aux Figures 8 et 9, où certains d'entre eux sont tracés. D'autre part, en accord avec la théorie, les séries (13) et (14) écrites avec les nouveaux coefficients (mêmes expressions qu'avec les anciens), convergent, comme on peut l'observer à la Figure 10. Bien sûr, avant l'angle critique les courbes des Figures 7 et 10 sont identiques puisque, dans ce cas, tous les coefficients restent inchangés par l'orthogonalisation des modes évanescents. Pour finir, remarquons que, pour les zones de convergence pour la mise en équations usuelle (*cf.* Figure 7 pour $\theta > 37,5^\circ$ par exemple), la nouvelle formulation converge plus lentement. Ceci est visible à travers les petites oscillations autour de la somme de la série (vert intense) à la Figure 10.

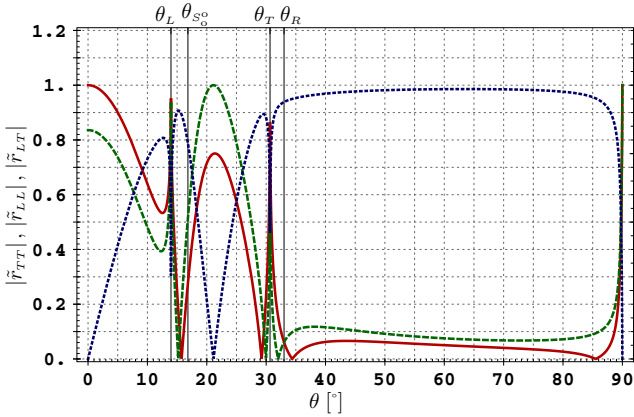


FIG. 9: Modules des coefficients de réflexion $\tilde{r}_{TT}$ (continu), $\tilde{r}_{LL}$ (tirets) et $\tilde{r}_{LT}$ (points) dans la plaque, exprimés dans la base orthogonale.

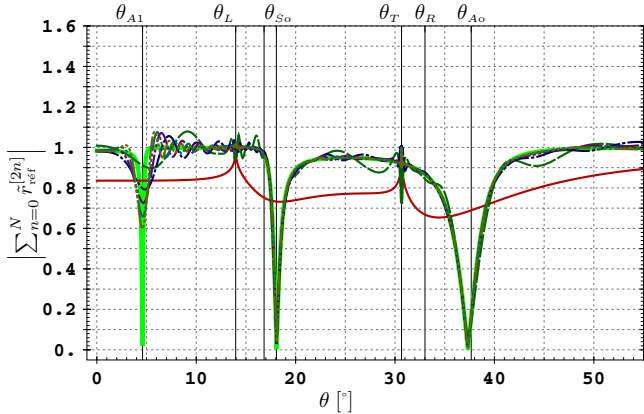


FIG. 10: Module de la somme des N premières réflexions $\sum_{n=0}^N \tilde{r}_{\text{réf}}^{[2n]}$, pour N variant de 0 à 25 avec un pas de 5, dans la base orthogonale.

5 Conclusion

À travers ce travail, nous montrons comment, à partir de l'orthogonalisation des modes évanescents, la convergence de la série, exprimant les champs réfléchi et réfracté par une plaque plane anisotrope immergée comme la somme des multiples réflexions/réfractions, est assurée quel que soit l'angle d'incidence. L'une des

études à venir concerne une extension de ces résultats aux problèmes de la sphère et du cylindre immergés.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement Dmitri Zhakarov pour les conversations riches que nous avons eues lors de son séjour au LMP, ainsi que Alexander Shuvalov pour son regard critique et érudit.

Références

- [1] Brekhovskikh L.M., *Waves in layered media (Applied mathematics and mechanics)* (Academic Press, New York, 1960).
- [2] Debije P., "Das elektromagnetische Feld um einen Zylinder und die Theorie des Regenbonens", *Phys. Z.* 9, 775–778 (1908).
- [3] Brill D., Überall H., "Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinder", *J. Acoust. Soc. Am.* 50, 921–939 (1971).
- [4] Conoir J.M., Gérard A., "Un nouveau fond potentiel pour la matrice s ", *J. Acoustique* 2, 217–227 (1989).
- [5] Gérard A., "Scattering by spherical elastic layers : Exact solution and interpretation for a scalar field", *J. Acoust. Soc. Am.* 73, 13–17 (1983).
- [6] Deschamps M., Cao C., "Reflection/refraction of a solid layer by Debye's series expansion", *Ultrasonics* 29, 288–293 (1991).
- [7] Conoir J.M., Gérard A., Derem A., "Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. 1 - traitement des interfaces planes", *J. Acoustique* 4, 159–200 (1991).
- [8] Deschamps M., Hosten B., "The effects of viscoelasticity on the reflection and transmission of ultrasonic waves by an orthotropic plate", *J. Acoust. Soc. Am.* 91, 2007–2015 (1992).
- [9] Van Der Hijden J.H.M.T., *Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media (North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics)* (Elsevier Science Ltd, 1987).
- [10] Stroh A.N., "Steady state problems in anisotropic elasticity", *J. Math. and Physics* 41, 77–103 (1962).
- [11] Barnett D.M., Lothe J., "Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's functions, and surface waves in anisotropic elastic solids", *Physica Norvegica* 7(1), 13–19 (1973).
- [12] Lothe J., Barnett D.M., "On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface", *J. Applied Physics* 70(4), 428–433 (1976).
- [13] Shuvalov A.L., "Generalized relationships for guided acoustic waves in anisotropic plates", *Proc. R. Soc. Lond. A* 460, 2671–2679 (2004).
- [14] Ducasse E., Koabaz M., Deschamps M., "Diffraction d'ondes guidées dans une plaque anisotrope : problème 3D", dans "10^e Congrès Français d'Acoustique, Session Posters, Lyon", (2010).