

Modélisation numérique de l'acoustique en fluide thermovisqueux

Nicolas Joly¹, Petr Honzik^{1,2}, Dominique Rodrigues³, Jean-Noël Durocher³, Stéphane Durand¹, Michel Bruneau¹

¹Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613, avenue O. Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, nicolas.joly@univ-lemans.fr

²Institute of Biophysics and Informatics, First Faculty of Medicine, Charles University in Prague, Kateřinská 32, 121 08 Prague 2, Czech Republic

³Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE), 29 av. Roger Hennequin, 78197 Trappes cedex

En fluide thermovisqueux, les phénomènes de propagation acoustique sont accompagnés d'effets diffusifs (diffusion de chaleur par effet de conduction thermique et diffusion de quantité de mouvement par effet de viscosité), qui sont particulièrement intenses au voisinage des parois où ils développent les couches limites acoustiques (thermique et visqueuse). Ces phénomènes introduisent de la dissipation et viennent perturber le champ acoustique ; leur prise en compte est nécessaire lorsqu'une grande précision est requise (pour l'étude de systèmes métrologiques) ou lorsque les couches limites acoustiques doivent être décrites en détails (pour l'étude de phénomènes non-linéaires induits, comme en thermoacoustique et pour l'étude des écoulements redressés). Une méthode numérique est présentée, pour la modélisation de l'acoustique en fluide thermovisqueux en régime harmonique, basée sur une formulation à partir de la vitesse particulaire et de l'écart de température. La méthode des éléments finis et une technique de maillage adaptatif anisotrope sont associées pour obtenir la solution numérique dans des géométries complexes. Des exemples d'application sont présentés, dans des configurations bidimensionnelles et axisymétriques, illustrant la convergence de la méthode numérique et de la technique de maillage adaptatif anisotrope. Les champs acoustiques obtenus pour ces modèles peuvent être analysés très finement au cours de la période acoustique, y compris à l'intérieur des couches limites, et fournir des résultats numériques d'une grande précision.

1 Introduction

La prise en compte des effets de diffusion thermique et de viscosité du fluide pour la modélisation des phénomènes de propagation acoustique est rendue nécessaire lorsque des résultats d'une grande précision sont attendus, ou lorsque les systèmes étudiés sont de dimensions réduites. En effet, ces phénomènes de diffusion sont particulièrement intenses au voisinage des parois où ils développent des couches limites thermovisqueuses ; ces effets de surface prennent une importance d'autant plus grande qu'une au moins des dimensions du système est petite.

La modélisation numérique de ces phénomènes consiste donc à résoudre un système multi-physique et multi-échelle, en présence de couches limites ; elle nécessite de ce fait des précautions particulières quant aux formulations et aux procédures numériques utilisées. Les applications concernent notamment le domaine de la métrologie acoustique et l'étude des systèmes acoustiques miniatures.

2 Formulation et implémentation du calcul par éléments finis

La capacité d'un fluide à propager une onde acoustique met en œuvre ses propriétés de masse volumique et de compressibilité. Outre ces propriétés pouvant être associées à un fluide parfait, les fluides acoustiques réels présentent également une viscosité et une conduction thermique, qui participent à des phénomènes de diffusion (de quantité de mouvement par viscosité, de chaleur par conduction thermique) et développent des phénomènes irréversibles [1]. Associés aux conditions d'échange thermique et d'adhérence du fluide à la paroi, ces phénomènes diffusifs développent des couches limites acoustiques thermovisqueuses, d'épaisseurs

$$\delta_v = \sqrt{\nu / \pi f}, \quad \delta_h = \sqrt{\xi / \pi f}, \quad (1)$$

ν et ξ étant la viscosité cinématique de cisaillement et la diffusivité thermique du fluide et f la fréquence. Les phénomènes de propagation acoustique sont, quant à eux, caractérisés par la longueur d'onde acoustique $\lambda = c / f$ (figure 1), c étant la célérité des ondes. Dans les systèmes de dimensions grandes devant les épaisseurs δ_h , δ_v , et lorsque l'approximation d'onde plane est localement valide près des parois, ces effets de couches limites, confinés au voisinage des parois, peuvent être pris en compte par des conditions d'admittance équivalente [1,2,3].

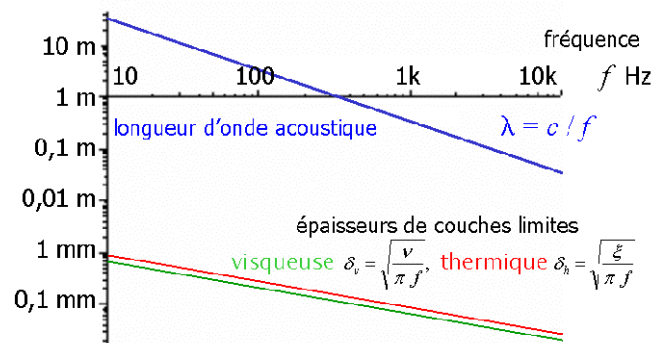


Figure 1 : longueurs caractéristiques des phénomènes acoustiques en fluide thermovisqueux (air, $1,013 \cdot 10^5$ Pa, 20°C)

Dans les systèmes acoustiques de géométrie complexe, ou lorsque leurs dimensions sont plus réduites, la modélisation des effets dissipatifs et réactifs de l'acoustique en fluide thermovisqueux suppose de décrire finement les transferts

de quantité de mouvement, de chaleur et de masse, y compris à l'intérieur des couches limites, et d'obtenir numériquement la solution des équations de conservation. Différentes approches ont été proposées [4,5,6,7,8,9]. Il est en particulier nécessaire de représenter les transferts thermiques et les effets de viscosité de cisaillement à l'intérieur des couches limites acoustiques, et de traduire les conditions aux limites thermique et mécanique. Le choix des variables d'écart de température τ et de vitesse particulaire acoustique $\mathbf{v}$ permet de rendre compte de l'ensemble des phénomènes (propagation acoustique, diffusions thermique et de quantité de mouvement par viscosité). Pour un fluide au repos et pour une petite perturbation acoustique, harmonique de pulsation ω , ces deux variables $(\tau, \mathbf{v})$ satisfont, sur le volume fluide, le système suivant de deux équations couplées [8,9] :

$$-\omega^2 \mathbf{v} - \left(\frac{c^2}{\gamma} + i\omega c l_v \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + i\omega c l_v \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + i\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \mathbf{grad} \tau = 0 \quad (2.1)$$

$$i\omega \tau - \gamma l_h c \operatorname{div} \mathbf{grad} \tau + \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et où les propriétés du fluide sont définies par le rapport γ des capacités thermiques à pression et à volume constants, l'augmentation de pression à masse volumique constante $\hat{\beta} = (\partial p / \partial T)_\rho$, la masse volumique ρ_0 , la célérité adiabatique du son c et les longueurs de diffusion thermique (l_h) et visqueuse (de cisaillement l_v' et de volume l_v) [1], qui s'écrivent $l_h = \lambda' / (\rho c_0 C_p)$, $l_v' = \mu / (\rho c_0)$ et $l_v = (\eta + 4\mu/3) / (\rho c_0)$, où μ et η sont les viscosités dynamiques de cisaillement et de volume, λ' la conductivité thermique, et C_p la capacité thermique massique isobare ; les variables utilisées dans les expressions (1) sont $\xi = \lambda' / \rho C_p$ et $\nu = \mu / \rho$.

Les conditions aux limites associées à ce système d'équations locales sont généralement des conditions de Dirichlet sur la frontière Γ ($\mathbf{n}$ désignant la normale externe à cette surface) :

- la condition isotherme $\tau = 0$ est une bonne approximation des conditions thermiques sur les parois, en raison d'une diffusivité thermique des parois grande devant celle du fluide acoustique,
- des conditions de valeur imposée pour les degrés de liberté de vitesse à la paroi, qu'il s'agisse de conditions d'adhérence à une paroi immobile ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), d'un mouvement imposé ($\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$) ou d'une condition de symétrie ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$).

En définissant le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ tel que

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \mathbf{grad} = - \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + i\omega c_0 l_v \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} + i\omega c_0 l_v \mathbf{rot} \operatorname{rot} ,$$

le système d'équation (2) s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 - \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \mathbf{grad} & i\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \mathbf{grad} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c^2 \operatorname{div} & i\omega - \gamma l_h c \operatorname{div} \mathbf{grad} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

dont les opérateurs ont une forme ordinaire pour la méthode des éléments finis de type Galerkin [10]. Les modèles

présentés ci-dessous concernent des champs bidimensionnels ou axisymétriques, chaque nœud du maillage comportant deux degrés de liberté pour la variable de vitesse particulaire et un pour la variable d'écart de température. Le champ de pression acoustique p est obtenu à partir de ces degrés de liberté par la relation

$$p = \hat{\beta} \tau - \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (4)$$

Deux échelles spatiales très différentes doivent être considérées pour modéliser l'acoustique en fluide thermovisqueux : la longueur d'onde acoustique λ et les épaisseurs de couche limite δ_h, δ_v , qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs, et ce quelle que soit la fréquence (figure 1). Pour obtenir une solution numérique des équations de la physique de l'acoustique en fluide thermovisqueux, une difficulté importante est de disposer d'un maillage adéquat pour représenter le champ aux bonnes échelles, tout en évitant un maillage plus dense que nécessaire, qui conduirait à un coût de calcul excessif.

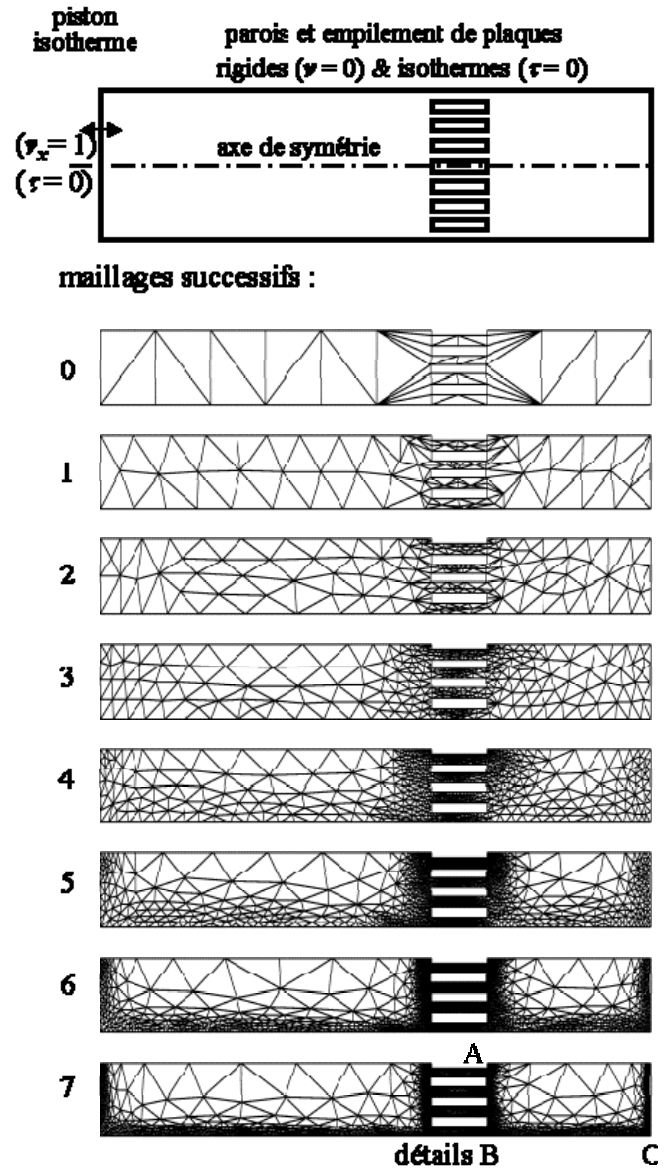


Figure 2 : maillages successifs générés par la procédure de maillage adaptatif anisotrope, pour la modélisation du champ acoustique dans un résonateur thermoacoustique

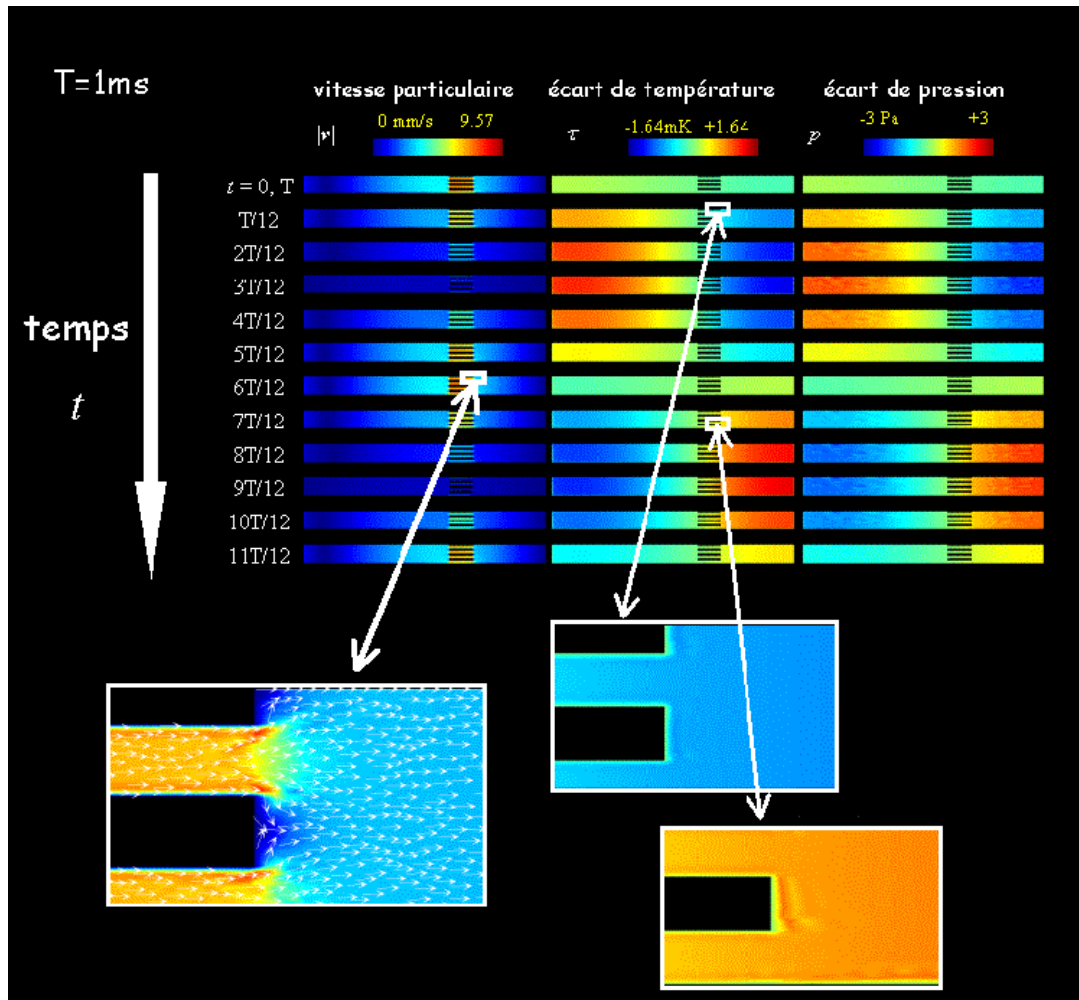


Figure 3 :

champ acoustique dans un résonateur thermoacoustique, à différents instants de la période acoustique :

en haut : vitesse particulaire, écarts de température et de pression acoustiques au cours de la période,

vignettes : détails du champ au voisinage des bords de l'empilement de plaques

Les techniques de maillage *adaptatif* permettent de concentrer l'effort de calcul dans les régions où la structure du champ est la plus complexe ; par ailleurs, l'utilisation de maillages *anisotropes* permet de représenter les variations à l'échelle des épaisseurs de couche limite δ_h, δ_v dans la direction normale aux parois, sans discrétiser la surface de la paroi à une échelle aussi petite. Dans les exemples qui suivent, le maillage adaptatif anisotrope BAMG [11] a été utilisé pour générer, par itérations successives, le maillage 2D adapté au problème à résoudre : la procédure est initialisée avec un maillage grossier (par exemple le maillage 0 de la figure 2) ; pour chaque itération, (i) la solution des équations (2) est obtenue par la méthode des éléments finis, puis (ii) les dérivées secondes du champ sont analysées pour définir une métrique qui distribue uniformément l'erreur d'interpolation ; (iii) enfin, un nouveau maillage est généré sur la base de cette métrique [11]. Cette procédure converge rapidement vers un maillage adapté au problème à résoudre (voir les maillages 1 à 7 de la figure 2), l'effort de calcul étant focalisé sur les couches limites et les régions du domaine d'étude où le champ présente les plus fortes variations [10].

3 Applications

En combinant une formulation et une technique de maillage adaptés, la modélisation fine de l'acoustique en fluide thermovisqueux peut être réalisée numériquement pour des systèmes de géométrie complexe ; des exemples d'application à l'étude de la discontinuité d'un guide

d'onde ou d'un microphone miniature [10,13] sont présentés par ailleurs. Les exemples présentés ci-dessous concernent des résonateurs à onde stationnaire (§3.1) ou progressive (§3.2), et des résultats relatifs à l'étude de l'oreille artificielle (§3.3). Dans ces exemples, le fluide acoustique est de l'air à la pression de $1,01325 \cdot 10^5$ Pa et la température de 23°C . Les conditions aux parois sont : la condition thermique isotherme $\tau=0$ aux parois, les conditions mécaniques d'adhérence $\mathbf{v}=0$ sur les parois rigides, de vitesse normale imposée sur le piston d'excitation et des conditions adiabatique et de vitesse normale nulle sur les axes ou plans de symétrie.

3.1 Onde stationnaire dans un résonateur thermoacoustique

Un résonateur thermoacoustique bidimensionnel, équipé d'un empilement (stack) de sept plaques épaisses, est étudié à sa fréquence de résonance en demi-onde (des détails sont disponibles en référence [10]). Le champ acoustique est excité par un piston plan situé à l'extrémité gauche du résonateur ; en raison de considérations de symétrie, seule la moitié inférieure du résonateur est modélisée (figure 2).

La solution pour le champ acoustique est illustrée en figure 3, à différents instants de la période acoustique T . L'onde stationnaire est reconnaissable à la présence des ventres d'écarts de pression et de température acoustique en extrémités du résonateur ; le maximum de vitesse

particulière acoustique est observé en quadrature avec les extréma de température et de pression, le rétrécissement de section lié à l'épaisseur des plaques conduisant à une vitesse plus importante à l'intérieur de l'empilement. En raison de la condition d'adhérence et des échanges thermiques avec la paroi, les couches limites visqueuse et thermique se développent près des parois.

3.2 Onde progressive en guide d'onde annulaire

L'onde progressive parcourant un guide annulaire est étudiée. Dans un tel dispositif, appelé "acoustitron", l'onde est entretenue par un mouvement sinusoïdal en opposition des parois interne et externe du guide d'onde, ce mouvement des parois progressant avec la même célérité que l'onde acoustique. La figure 4 illustre le champ d'écart de température (couleurs) et la direction de la vitesse particulière du fluide à un instant de la période acoustique. Au cours de la propagation, ce champ subit une rotation d'ensemble. Les deux ventres d'écart de température, en opposition, sont clairement visibles sur cette figure, ainsi que les couches limites thermiques développées par la condition isotherme imposée en paroi.

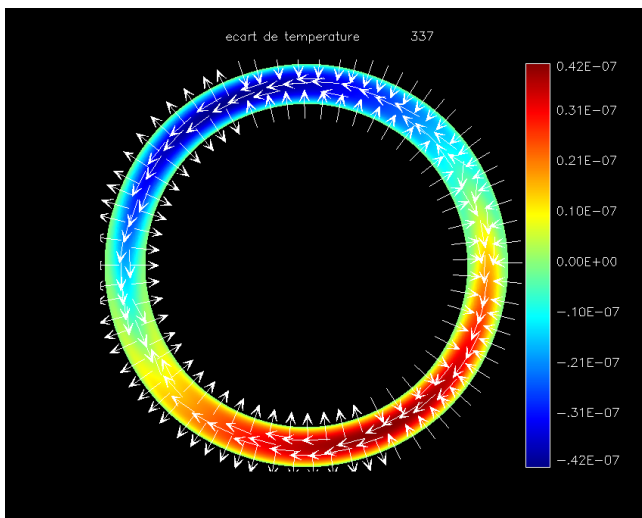


Figure 4 : Champ acoustique progressif en guide annulaire ; couleur : écart de température, flèches : orientation de la vitesse particulière

3.3 Modélisation de l'oreille artificielle

Un schéma de l'oreille artificielle commercialisée par la société B & K est présenté en figure 5. Le volume frontal V_1 , qui représente le pavillon de l'oreille humaine, assure le couplage entre le casque de l'audiomètre et l'oreille artificielle. Les autres éléments de l'oreille artificielle sont censés reproduire l'impédance acoustique d'entrée du conduit auditif, en admettant qu'ils se comportent comme des impédances acoustiques localisées dans le plan de la membrane du microphone. Ces impédances sont réalisées à l'aide de conduits étroits en communication avec des cavités caractérisées principalement par leur volume.

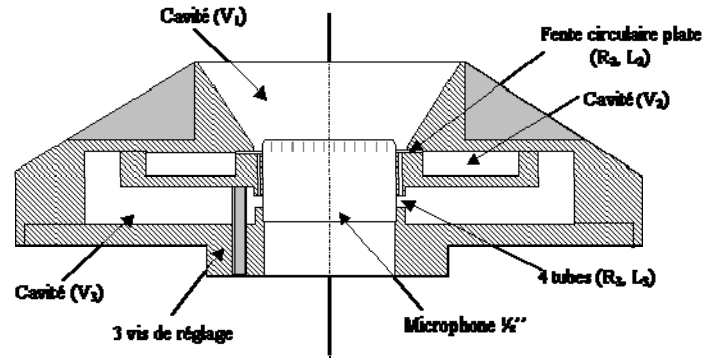


Figure 5 : schéma de l'oreille artificielle

Le système n'étant pas axisymétrique (en raison principalement des quatre tubes communiquant avec la cavité V_3), l'impédance de ce dispositif est étudiée en considérant séparément, en tant que systèmes axisymétriques, la fente circulaire plate associée à la cavité V_2 , la cavité V_3 , et enfin les tubes (R_3, L_3) ; ce type d'étude 'par morceaux' est celui généralement retenu pour modéliser l'oreille artificielle [14, 15].

Les principaux résultats numériques obtenus sur les deux premiers de ces sous-systèmes sont brièvement présentés. Les parois des différentes cavités étant rigides et massives, les conditions aux limites retenues sont des conditions de vitesse nulle et de paroi isotherme. L'excitation est réalisée par un piston dont le profil de vitesse normale est défini avec un raccord de vitesse nulle sur les bords du piston, afin d'éviter toute discontinuité de vitesse. L'impédance acoustique d'entrée $z = \langle p \rangle / w_p$ est calculée à partir de la pression moyenne

$$\langle p \rangle = \iint_S p \, ds / S$$

acoustique $w_p = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$, $\mathbf{n}$ et S étant la normale et la

section du piston. Les champs acoustiques obtenus pour (i) la fente circulaire plane et la cavité V_2 et (ii) la cavité V_3 sont présentés, au début de la période acoustique ($t=0$), sur les figures 6-7, a-b pour une fréquence d'excitation de 1kHz. L'écoulement cisaillé en entrée de la cavité V_2 et les couches limites thermiques sont clairement visibles. Pour ces deux systèmes, l'impédance acoustique obtenue par le calcul numérique montre un très bon accord avec celle obtenue d'après la solution d'un modèle analytique [15], aussi bien pour le module, la phase que la fréquence de la première antirésonance (figures 6-7c).

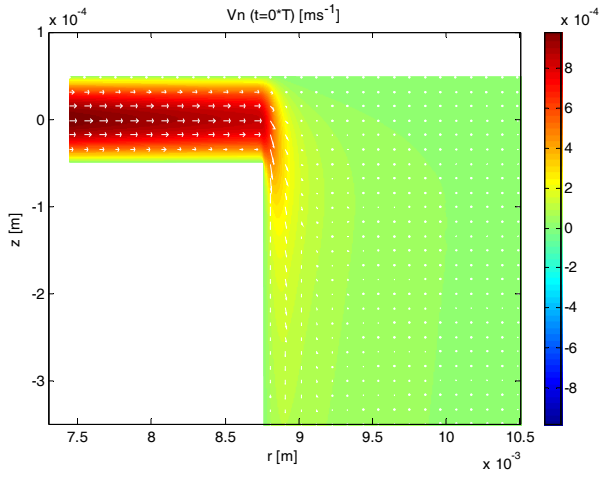


Figure 6a : détail du profil de vitesse en entrée de la cavité V_2 , au début de la période acoustique ($t=0$), 1 kHz

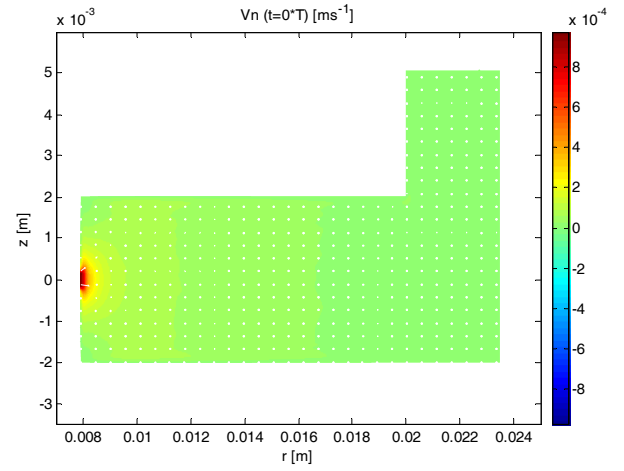


Figure 7a : détail du profil de vitesse en entrée de la cavité V_3 , au début de la période acoustique ($t=0$), 1 kHz

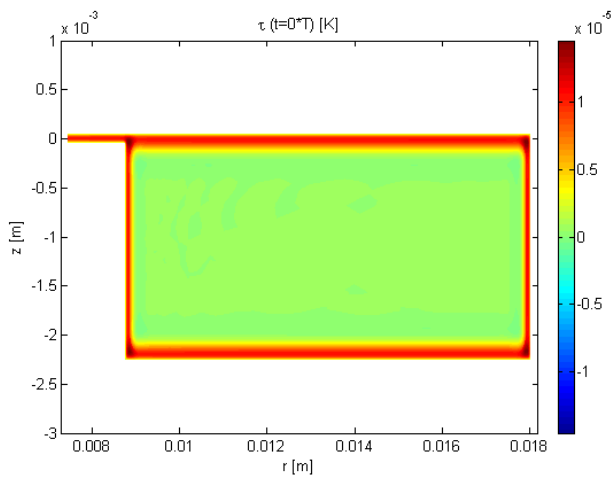


Figure 6b : écart de température dans la cavité V_2 , au début de la période acoustique ($t=0$), 1 kHz

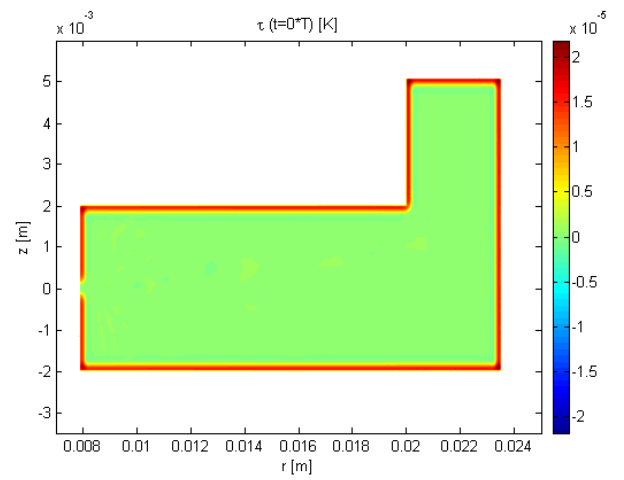


Figure 7b : écart de température dans la cavité V_3 , au début de la période acoustique ($t=0$), 1 kHz

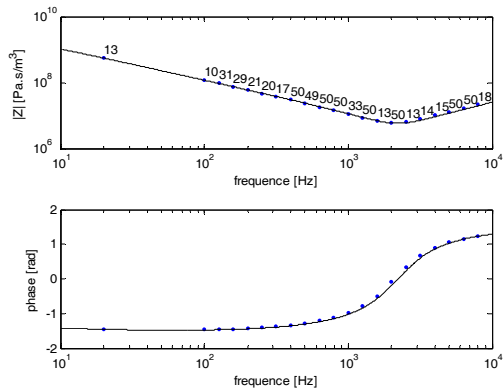


Figure 6c : impédance d'entrée de la fente circulaire débouchant sur la cavité V_2 ; ligne : modèle analytique, points : calcul par éléments finis

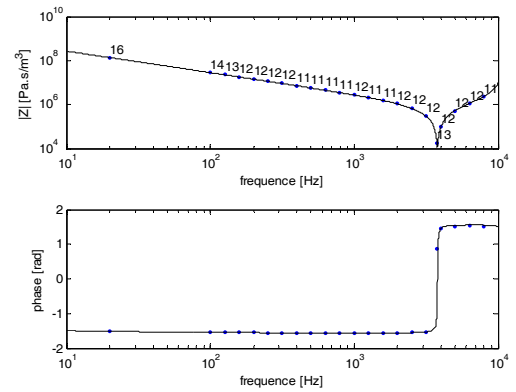


Figure 7c : Figure 6c : impédance d'entrée de cavité V_3 ; ligne : modèle analytique, points : calcul par éléments finis

4 Conclusion

La modélisation de l'acoustique en fluide thermovisqueux conduit à réaliser un calcul numérique multi-physique et multi-échelle, pour décrire tant les phénomènes propagatifs de l'acoustique à l'échelle de la longueur d'onde que les phénomènes de diffusion à l'échelle, beaucoup plus réduite, des épaisseurs de couches limites. La combinaison d'une formulation adaptée et de techniques numériques efficaces (éléments finis et maillage adaptatif anisotrope) permet d'accéder, en régime harmonique, à des solutions d'une grande précision.

Remerciements

Les auteurs remercient vivement F. Hecht pour le code de maillage adaptatif anisotrope 2D BAMG [11] et P. Gentil pour les outils graphiques de GRAME [12].

Références

- [1] M. Bruneau, Manuel d'acoustique fondamentale, Paris - Hermès, ISBN 2-86601-712-9, (1998).
- [2] L. Cremer, On the acoustic boundary layer outside a rigid wall, Arch. Elektr. Uebertr. **2**,235 (1948)
- [3] R. Bossart, N. Joly, M. Bruneau, Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in thermo-viscous fluids, J. Sound Vib. **263** (2003) 69-84
- [4] C. Karra, M. Ben Tahar, Modélisation par éléments finis de frontières du comportement vibratoire d'une membrane couplée à une couche de fluide thermoconducteur, C. R. Acad. Sci. Paris **326 II b** (1998) 733-739
- [5] W.M. Beltman, Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, Part I: Theory, J. Sound Vib. **227** (1999) 555-586
- [6] M. Malinen, M. Lyly, P. Råback, A. Kärkkäinen, L. Kärkkäinen, A finite element method for the modeling of thermo-viscous effects in acoustics, Proc. 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS, Jyväskylä, Finland, (2004), 12p. <http://www.mit.jyu.fi/eccomas2004/proceedings/pdf/97.pdf>
- [7] W.M. Beltman, Y.H. Wijnant, M.J. Nijhof, An overview of models for viscothermal wave propagation, including fluid structure interaction, Proc. Acoustics'08 Paris, 6p., *Acta Acustica - Acustica* **94**, p. 452, 2008, <http://intelligence.eu.com/acoustics2008/acoustics2008/cd1/data/articles/002697.pdf>
- [8] R. Bossart, N. Joly, M. Bruneau, Méthodes de modélisation numérique des champs acoustiques en fluide thermovisqueux, Proc. 6^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Lille, France, (2002) 411-414 <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00345808/fr/>
- [9] N. Joly, M. Bruneau, R. Bossart, Coupled Equations for Particle Velocity and Temperature Variation as the Fundamental Formulation of Linear Acoustics in Thermo-Viscous Fluids at Rest, *Acta Acustica - Acustica* **92** (2006), 202-209
- [10] N. Joly, Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes: implementation of the particle velocity and temperature formulation, *Acta Acustica - Acustica*, **96**, à paraître, 2010
- [11] F. Hecht, BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator (1997), http://pauillac.inria.fr/cdrom_a_graver/www/bamg/eng.htm <http://mule.ann.jussieu.fr/~hecht/ftp/bamg/>
- [12] P. Gentil, GRAME, Graphique Mélinea (2003), <http://perso.univ-rennes1.fr/pascal.gentil/programmes/grame/index.html>
- [13] N. Joly, Finite element modeling of thermoviscous acoustics in closed cavities, Proc. Acoustics'08 Paris, 6p., 324, *Acta Acustica - Acustica* **94** (2008) <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00346938/fr/> <http://intelligence.eu.com/acoustics2008/acoustics2008/cd1/data/articles/002266.pdf>
- [14] A. Bravo, R. Barham, M. Ruiz, J.M. López, G.D. Arcas, M. Recuero, A new 3D finite element model for the IEC 60318-1 artificial ear, *Metrologia* **45**, 448-458, 2008
- [15] Bruneau, M., Bruneau, A.-M. : Etude théorique de l'impédance acoustique de transfert d'une cavité fermée par deux microphones et munie d'impédances localisées sur paroi : application à la caractérisation de l'oreille artificielle, rapport B.N.M. No 01 3 010, Université du Maine, Juin 2002