

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Approche thermodynamique de l'analyse statistique de l'énergie

Alain Le Bot¹

¹ Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes, CNRS - Ecole centrale de Lyon 69134 Ecully, alain.le-bot@ec-lyon.fr

Statistical Energy Analysis (SEA) is the most popular method intended to high frequency vibrations in structures and acoustics. Based on an energy approach, SEA is a simple application of energy balance under the diffuse field assumption. In this study, a thermodynamical approach of SEA is proposed. Considering that the exact repartition of vibrational energy on modes is not known, an appropriate definition of the structure function of SEA is introduced. Then, the related relationships of vibrational temperature and vibrational entropy are derived. Similarities and differences with classical temperature and entropy of gases are discussed. In particular, the meaning and consequences of the second principle of thermodynamics are clarified within the context of SEA.

1 Introduction

L'idée principale de la vibroacoustique statistique et en particulier de l'analyse statistique de l'énergie (SEA), est que lorsque les systèmes vibratoires deviennent trop complexes, soit que le nombre de modes est très grand (hautes fréquences), soit que les incertitudes sont importantes (ensemble de systèmes similaires), il est préférable de renoncer à une description déterministe et d'adopter des outils statistiques [1]. Cette remarque si naturelle dans le contexte de la physique statistique où le nombre de particules est de l'ordre du nombre d'Avogadro $\sim 10^{23}$, relève ici d'un choix plus que d'une nécessité car le nombre d'individus reste relativement faible, de l'ordre de plusieurs millions dans le meilleur des cas [2]; pas assez élevé pour disqualifier totalement l'approche déterministe.

Cependant, l'approche statistique est intéressante conceptuellement. Elle permet d'économiser du temps de calcul et/ou de modéliser des systèmes plus gros ou à plus haute fréquence. Mais elle permet surtout d'accéder directement à des grandeurs macroscopiques (énergie modale, puissance moyenne échangée) plus robustes aux fluctuations des systèmes, sans avoir à calculer les variables microscopiques que sont les fréquences propres, modes propres et amplitudes modales. La description des systèmes à partir de ces grandeurs macroscopiques est de nature différente de la vision classique. En SEA, on s'intéressera aux sources vibratoires, aux chemins de propagation de l'énergie ainsi qu'aux régions de dissipation. C'est bien une approche originale de la vibroacoustique qui est proposée.

Jusqu'à présent, l'analyse statistique de l'énergie repose entièrement sur un bilan d'énergie des systèmes vibroacoustiques. La relation principale de la SEA qui établit la proportionnalité de la puissance échangée avec la différence des énergies modales, permet d'assoir cette vision purement énergétique des systèmes vibrants et d'établir une analogie avec la thermodynamique dans laquelle l'énergie modale jouerait le rôle de température. Pourtant cette description reste incomplète car rien

n'est dit sur le second principe de la thermodynamique [3] de même que l'analogie entre énergie modale et température reste fortuite. Dans ce papier, nous montrons que l'analyse statistique de l'énergie résulte des principes généraux de la mécanique statistique et en particulier qu'il est possible d'introduire une notion d'entropie vibratoire permettant à la fois de définir la température vibratoire comme l'énergie modale et de compléter la présentation thermodynamique de la SEA.

2 Concepts généraux

Les systèmes vibratoires doivent tout d'abord être divisés en sous-systèmes. Il n'existe pas de règle générale permettant d'établir cette subdivision, mais elle doit être réalisée de sorte que les hypothèses générales de la SEA, énoncées ci-dessous, sont vérifiées. En général, les sous-systèmes sont des constituants structuraux tels que des plaques, poutres, cavités acoustiques. Mais on peut aussi vouloir séparer des groupes de modes très distincts comme les modes longitudinaux ou transverses des ondes structurales.

L'analyse des systèmes est effectuée dans une bande de fréquences $[\omega - \Delta\omega/2, \omega + \Delta\omega/2]$. Celle-ci doit être assez large pour que le nombre N de modes dans chaque sous-système soit suffisamment grand. L'énergie vibratoire de chaque sous-système contenue dans cette bande d'analyse est notée E . Elle est supposée ou considérée comme désordonnée. C'est elle qui joue le rôle de chaleur et dont le comportement statistique est simple.

Les hypothèses générales de l'analyse statistique de l'énergie sont les suivantes :

- Les sources de vibration sont aléatoires stationnaires large bande et mutuellement décorréées,
- Les sous-systèmes sont à l'équilibre *i.e.* équipartition modale ou champs diffus,
- Les couplages sont faibles et conservatifs.

Ces hypothèses ont été largement discutées dans la littérature [4, 5, 6, 7].

Pour cerner le domaine de validité de la SEA, quatre nombres sans dimension sont utiles par sous-système [8].

Il s'agit du nombre de modes N , du recouvrement modal $M = \eta\omega N/\Delta\omega$ où $N/\Delta\omega$ est la densité modale, du facteur d'atténuation $m = \eta\omega\bar{l}/c$ où $\bar{l}$ est le libre parcours moyen et c la vitesse de groupe des ondes et le facteur de couplage $\gamma = \eta_{ij}/\eta_j$ qui doit être défini pour chaque sous-système voisin. Le domaine de validité est cerné par les conditions suivantes $N > 1$, $M > 1$, $m < 1$ et $\gamma < 1$.

3 Bilan d'énergie

Les sous-systèmes reçoivent de l'énergie vibratoire par les sources externes mécaniques ou acoustiques. La puissance vibratoire injectée dans le sous-système i est notée P_i . Une part de cette puissance est dissipée par les processus internes d'amortissement des vibrations, d'absorption sonore *etc.* On note P_i^{diss} cette puissance dissipée. Enfin, de l'énergie vibratoire peut être échangée avec les sous-systèmes voisins. La puissance totale échangée entre les sous-systèmes i et j est notée P_{ij} . En condition stationnaire, le bilan de puissance du sous-système i est,

$$P_i^{\text{diss}} + \sum_{j \neq i} P_{ij} = P_i. \quad (1)$$

où la somme est réalisée sur l'ensemble des sous-systèmes j connectés à i (voir figure 3).

La puissance perdue par l'ensemble des processus de dissipation peut être résumée par la relation globale suivante,

$$P_i^{\text{diss}} = \omega\eta_i E_i, \quad (2)$$

où η_i est le facteur de perte par amortissement. Celui-ci englobe tous les processus de dissipation sans distinction entre ceux qui agissent sur l'énergie cinétique (forces visqueuses) ou sur l'énergie élastique (hystérésie des matériaux), ni ceux qui opèrent dans le volume (atténuation atmosphérique du son) ou sur la surface (absorption acoustique des surfaces).

Enfin, la puissance échangée entre deux sous-systèmes i et j est une combinaison linéaire des énergies vibratoires [9, 10, 11, 12],

$$P_{ij} = \omega(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j), \quad (3)$$

où η_{ij} est le facteur de perte par couplage. Les facteurs de perte par couplage sont des constantes phénoménologiques attachées au couplage entre deux sous-systèmes. Leur valeur doit être déterminée au cas par cas soit par mesure soit par des formules analytiques.

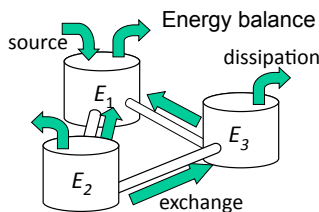


FIGURE 1 – Bilan d'énergie en SEA. Les sources fournissent l'énergie aux sous-systèmes qui est soit dissipée soit échangée avec les sous-systèmes voisins.

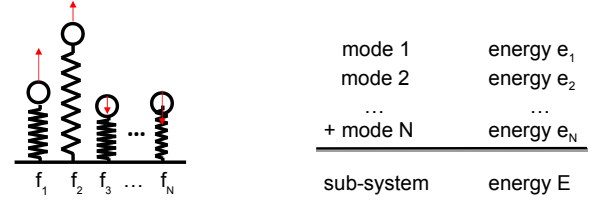


FIGURE 2 – Un sous-système SEA est constitué d'un ensemble de N résonateurs se partageant l'énergie vibratoire totale E .

Un grand nombre de cas sont connus dans la littérature, couplage de plaques, de cavités acoustiques, rayonnement sonore, réponse structurale *etc.* Ces facteurs de perte par couplage ne peuvent pas prendre des valeurs arbitraires. Ils sont liés par la relation de réciprocité,

$$N_i\eta_{ij} = N_j\eta_{ji}. \quad (4)$$

où N_i est le nombre de modes du sous-système i . La relation de réciprocité permet de mettre en lumière l'importance de l'énergie modale E_i/N_i . En effet, la puissance échangée prend la forme,

$$P_{ij} = \omega\eta_{ij}N_i \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right). \quad (5)$$

Elle est proportionnelle à la différence des énergies modales.

En substituant les équations (2) et (3) dans le bilan (1), on obtient l'expression du premier principe de la thermodynamique en SEA,

$$P_i = \omega\eta_i E_i + \sum_{j \neq i} \omega\eta_{ij} E_i - \omega\eta_{ji} E_j. \quad (6)$$

Ce système d'équations linéaires permet de prédire les valeurs de E_i si P_i est connu ou réciproquement.

4 Entropie vibratoire

L'analyse statistique de l'énergie, tout comme la physique statistique, est un processus d'approximation appliqué aux équations du mouvement [13]. Par l'adoption des variables macroscopiques que sont l'énergie modale et la puissance moyenne échangée, une partie de l'information contenue dans les équations du mouvement a été négligée. En retour, il en résulte une loi statistique simple exprimée par l'équation (5).

L'approximation réalisée en SEA est que la répartition exacte de l'énergie vibratoire sur les modes est ignorée [14]. Les excitations sont de nature aléatoire de sorte que l'énergie de chaque mode est fluctuante. Même en condition stationnaire où l'énergie totale est constante, sa répartition sur les modes est changeante. On peut donc idéaliser la situation de la manière suivante. Un sous-système est constitué d'un groupe de modes dont les fréquences sont $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. L'énergie E peut être répartie sur ces modes de manière quelconque (voir figure 2). Le hamiltonien d'un tel système dynamique est,

$$H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega_i^2}{2} q_i^2 + \frac{1}{2m_i} p_i^2. \quad (7)$$

Il exprime la somme des énergies cinétiques et élastiques des N résonateurs, p_i et q_i étant respectivement l'impulsion et la position de chaque masse mobile. Le système parcourt une trajectoire d'énergie constante. Dans l'espace des phases $p_i, q_i, i = 1 \dots N$, la position du système reste sur une hyper-surface $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = E$. Si l'énergie vibratoire E est imposée avec une incertitude δE , le nombre de micro-états, c'est à dire de positions accessibles, est proportionnel au volume accessible dans l'espace des phases. Ce dernier vaut $dV/dE \times \delta E$ où $V(E)$ est le volume compris dans la surface fermée $H = E$. On introduit donc la fonction de structure $\Omega(E) = dV/dE$ dont on peut calculer analytiquement la valeur pour le hamiltonien (7),

$$\Omega(E) = \frac{dV}{dE} = \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^N \frac{E^{N-1}}{N-1!}. \quad (8)$$

Le nombre de micro-états W est donc,

$$W = \frac{\Omega(E)}{h^N} \delta E, \quad (9)$$

où h^N est le volume élémentaire d'un micro-état dans l'espace des phases. En physique statistique, tout système étant quantique de manière ultime, ce volume élémentaire est imposé par la relation d'incertitude de Heisenberg et h est la constante de Planck. Mais en vibroacoustique, on peut considérer que h est choisi arbitrairement. L'entropie selon Boltzmann est $S = k \log W$. En négligeant le terme dépendant de $\delta E/E$, l'entropie d'un sous-système SEA est,

$$S(E, N) = kN \left[1 + \log \left(\frac{2\pi E}{h\omega N} \right) \right]. \quad (10)$$

La température est définie en thermodynamique par,

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N. \quad (11)$$

En appliquant cette définition à l'expression (10) de l'entropie vibratoire, il vient,

$$T = \frac{E}{kN}, \quad (12)$$

et l'on obtient cette fois une justification du rapport entre température vibratoire et énergie modale.

5 Entropie de mélange

L'expression (10) obtenue pour l'entropie vibratoire possède les propriétés habituelles de l'entropie thermodynamique. C'est une fonction d'état car elle ne dépend que de E et N . C'est aussi une fonction extensive car $S(2E, 2N) = 2S(E, N)$. Si maintenant on considère deux systèmes d'énergies E_1 et E_2 et ayant pour nombre de modes N_1 et N_2 . Les énergies, nombres de modes et énergies modales sont a priori distincts. La question posée par le second principe de thermodynamique est la suivante. Que se passe-t-il lorsque les deux systèmes vibratoires sont mis en contact ?

Lorsque les deux sous-systèmes sont assemblés, leur énergie totale est $E_1 + E_2$ et le nombre total de modes

est $N_1 + N_2$. Ainsi l'entropie vibratoire à l'équilibre est $S(E_1 + E_2, N_1 + N_2)$. L'entropie créée au cours du mélange est donc la différence entre cette entropie finale et la somme des entropies initiales,

$$\Delta S = S(E_1 + E_2, N_1 + N_2) - S(E_1, N_1) - S(E_2, N_2). \quad (13)$$

Un simple calcul montre que,

$$\Delta S = k(N_1 + N_2) \log \frac{E_1 + E_2}{N_1 + N_2} - kN_1 \log \frac{E_1}{N_1} - kN_2 \log \frac{E_2}{N_2}. \quad (14)$$

La propriété de convexité de la fonction $(x, y) \mapsto y \log(y/x)$ permet de conclure que $\Delta S > 0$. Ceci est l'expression du second principe de la thermodynamique dans le contexte de la SEA.

Cette expression permet aussi d'établir la condition d'équilibre entre deux sous-systèmes. Deux sous-systèmes sont en équilibre si leur entropie de mélange est nulle soit $\Delta S = 0$. Un examen de la relation (14) montre que cet équilibre est atteint lorsque les énergies modales sont égales,

$$\frac{E_1}{N_1} = \frac{E_2}{N_2}. \quad (15)$$

Cette condition d'équilibre permet de comprendre la relation fondamentale (3). La puissance échangée P_{ij} doit être nulle à l'équilibre c'est à dire lorsque $T_i = T_j$. Les premiers termes du développement limité de la relation $P_{ij} = f(T_i, T_j)$ sont donc nuls. Le premier terme non nul est de la forme $T_i - T_j$, ce qui correspond à l'approximation classique de la thermodynamique linéaire pour laquelle les flux sont proportionnels aux affinités [15].

6 Bilan d'entropie

Le paragraphe précédent a décrit l'évolution de sous-systèmes isolés c'est à dire sans excitation ni dissipation. C'est un cas limite permettant d'établir les propriétés de l'entropie. Cependant, ce n'est pas la situation la plus ordinaire en SEA. Il convient donc de décrire les échanges entropiques entre sous-systèmes en contact, l'ensemble étant maintenu hors équilibre par les sources vibratoires.

L'expression la plus utile pour établir un bilan entropique est la définition de l'entropie de Clausius,

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (16)$$

Nous avons montré que la température vibratoire est proportionnelle à l'énergie modale, $T = E/kN$. Par ailleurs, la chaleur δQ apportée au sous-système doit ici être interprétée comme l'énergie vibratoire apportée car il n'existe pas ici de distinction entre chaleur et travail comme en thermodynamique.

Les sources vibratoires fournissent la puissance P_i au sous-système i . Ainsi, au cours d'une durée infinitésimale dt , la chaleur apportée vaut $\delta Q = P_i dt$. Il s'ensuit une augmentation de l'entropie du sous-système,

$$\frac{dS_i}{dt} = k \frac{P_i N_i}{E_i}. \quad (17)$$

C'est l'expression du débit entropique de la source.

Les dissipations internes des vibrations ont pour conséquence une diminution de l'énergie vibratoire des sous-systèmes. Contrairement à la thermodynamique classique, les processus de dissipation vont extraire de la chaleur (au sens d'énergie vibratoire) et sont donc responsable d'une diminution de l'entropie du sous-système. Comme $\delta Q = -\omega\eta_i E_i$, il vient,

$$\frac{dS_i^{\text{diss}}}{dt} = -k\omega\eta_i N_i. \quad (18)$$

Le flux entropique des processus d'amortissement est donc constant.

Enfin, les échanges entre sous-systèmes voisins vont créer de l'entropie de mélange en vertu de ce qui vient d'être vu au paragraphe précédent. Si P_{ij} est la puissance échangée entre i et j , alors le sous-système i accusera une perte d'entropie de $P_{ij}dt/T_i$ pendant la durée dt . Mais dans le même temps, le sous-système j reçoit de la chaleur et donc de l'entropie. Son gain est $P_{ij}dt/T_j$. Du point de vue du système global, l'accroissement d'entropie par irréversibilité est donc,

$$\frac{dS_{ij}^{\text{irr}}}{dt} = P_{ij} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right). \quad (19)$$

En substituant dans cette expression, les équations (3) et (12), on obtient,

$$\frac{dS_{ij}^{\text{irr}}}{dt} = k\eta_{ij}\omega N_i \frac{N_i N_j}{E_i E_j} \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right)^2, \quad (20)$$

expression dont on voit sans peine que l'entropie de mélange est toujours positive.

Le système global est en régime stationnaire. On peut s'attendre à ce que le bilan entropique global soit équilibré. C'est ce qu'on peut vérifier sans peine en calculant,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{dS_i}{dt} - \frac{dS_i^{\text{diss}}}{dt} \right) + \sum_{i>j} \frac{dS_{ij}^{\text{irr}}}{dt} = 0. \quad (21)$$

7 Conclusion

L'entropie est une notion tout aussi essentielle en SEA que l'est l'énergie. Elle permet de justifier rigoureusement la définition de la température vibratoire et d'interpréter la SEA en termes de thermodynamique linéaire

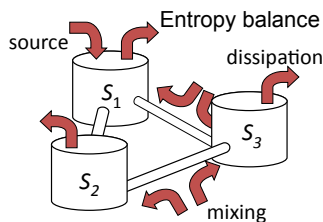


FIGURE 3 – Bilan d'entropie en SEA. Les sources fournissent de l'entropie aux sous-systèmes. Ceux-ci en perdent par les processus de dissipation. Enfin l'échange avec les sous-systèmes voisins génère une entropie de mélange.

hors équilibre. Les expressions de l'entropie d'un sous-système et de l'entropie créée par mélange aux interfaces apporte un éclairage supplémentaire. Les systèmes SEA peuvent être analysés en termes de flux d'énergie tout autant qu'en termes de flux d'entropie qui mesurent les déséquilibres entre sous-systèmes.

Références

- [1] Lyon, R.H. Fluctuation theory and (very) early statistical energy analysis (SEA). *J. Acoust. Soc. Am.*, **2003**, *113*, 2401-2403.
- [2] Shorter, P. Modeling noise and vibration transmission in complex systems, *IUTAM symposium on The Vibration Analysis of Structures with Uncertainties*, St Petersburg, Russia, July 2009.
- [3] Carcaterra, A. An entropy formulation for the analysis of energy flow between mechanical resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **2002**, *16*, 905-920.
- [4] Smith, P.W. Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling. *J. Acoust. Soc. Am.*, **1979**, *65*, 695-698.
- [5] Fahy, F.J. ; De-Yuan, Y. Power flow between non-conservatively coupled oscillators. *J. Sound Vib.*, **1987**, *114*, 1-11.
- [6] Fahy, F.J. Statistical energy analysis : a critical overview. In *Statistical Energy Analysis : an overview, with applications in structural dynamics* ; Keane, A.J., Price, W.G., Eds. ; Cambridge University Press : Cambridge, 1997 ; pp. 1-17.
- [7] Le Bot, A. Derivation of statistical energy analysis from radiative exchanges. *J. Sound Vib.*, **2007**, *300*, 763-779.
- [8] Le Bot, A. ; Cotoni, V. Validity diagrams of Statistical Energy Analysis. *J. Sound Vib.*, **2010**, *329*, 221-235.
- [9] Lyon, R.H. ; Maidanik, G. Power flow between linearly coupled oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **1962**, *34*, 623-639.
- [10] Newland, D.E. Calculation of power flow between coupled oscillators. *J. Sound Vib.*, **1966**, *3*, 262-276.
- [11] Scharton, T. ; Lyon, R.H. Power flow and energy sharing in random vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, **1968**, *43*, 1332-1343.
- [12] Newland, D.E. Power flow between a class of coupled oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **1968**, *43*, 553-559.
- [13] Jaynes, E.T. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, **1957**, *106*, 620-630.
- [14] Le Bot, A. Entropy in Statistical Energy Analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, **2009**, *125*, 1473-1478.
- [15] Prigogine, I. Introduction to thermodynamics of irreversible processes. *John Wiley and Sons Inc.*, New-York **1962**.