

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Analyse des symétries pour un traitement du signal systémique : Application à l'imagerie non linéaire des milieux complexes

Serge Dos Santos

ENI Val de Loire, Unité Mixte de Recherche "Imagerie et Cerveau" INSERM U930 - CNRS ERL 3106,

Université François Rabelais Rue de la Chocolaterie, BP3410, 41034 BLOIS CEDEX, FRANCE, serge.dossantos@univ-tours.fr

La méthode classique d'inversion d'impulsion utilisée en imagerie harmonique médicale repose sur un principe de symétrie. La composante non linéaire du signal (harmonique 2) est obtenue en utilisant le fait que l'élévation au carré est invariante par changement de signe. Le traitement du signal consiste alors à additionner les deux réponses et d'en extraire la composante non linéaire de l'harmonique 2. Dans le cas concret de l'étude de nonlinéarités plus complexes, comme celles de type hystérétique non classique observées dans l'os ou les matériaux endommagés, il apparaît souvent des signatures d'ordre 3 qu'il s'agit d'extraire dans un signal où la composante fondamentale reste encore très importante. Nous proposons dans ce papier de présenter une généralisation systémique du principe d'analyse des symétries et invariants d'un système complexe. L'analyse des symétries est appliquée au cas des équations de propagation acoustiques dans les milieux complexes, et permet l'extraction d'invariants. Dans un second temps, la procédure de pré-traitement du signal, utilisant les propriétés d'invariance par renversement temporel (TR) ou par réciprocité et incluant une symétrisation de l'excitation permet (*via* des méthodes avancée d'inversion d'impulsion) d'extraire ces signatures non linéaires d'ordre supérieur. Enfin, les méthodes de post-traitement du signal et d'extraction de la signature non linéaire permettent d'envisager, par un formalisme algébrique, la localisation de la source de nonlinéarité dans ces milieux de propagation complexes. La présentation de ces différentes étapes de l'approche algébrique de l'utilisation des invariants et symétries permet de décrire l'ossature des principes mis en oeuvre expérimentalement dans le cadre des méthodes TR-NEWS d'imagerie non linéaire des milieux complexes.

1 Introduction

L'analyse des symétries (SA) est l'une des méthodes théoriques les plus prometteuses pour résoudre et simplifier les problématiques liées au comportement non linéaire des systèmes complexes[1]. La puissance des nouveaux outils de calcul formel a permis la renaissance d'une méthode, proposée par S. Lie à la fin du 19ème siècle, d'analyse systématique des symétries des équations non linéaires, en utilisant la théorie des groupes continus. Ainsi, depuis quelques années, des résultats importants ont été obtenus, notamment en acoustique non linéaire appliqué à la modélisation complexe des milieux à bulles[2]. L'utilisation de l'analyse des symétries et d'une méthode de pseudo-séparation des variables[3] a permis de mettre en exergue des conditions particulières d'excitation conduisant à l'obtention de solutions mathématiques exactes. La généralisation de l'analyse des symétries, en tenant compte de symétries d'invariance de nature différentes, comme l'invariance par réciprocité, l'invariance par retournement temporel (TR), l'invariance par inversion d'impulsion, ou l'invariance géométrique liée au système expérimental d'excitation ou de mesure, permet de définir une approche systémique du traitement du signal associé à l'analyse d'un milieu complexe[4]. Nous proposons dans ce papier de rappeler quelques résultats de base à l'utilisation des symétries de Lie pour la simplification d'équations (linéaires ou

non) de propagation d'ondes, de diffusion ou de vibrations acoustiques des bulles, nécessaires à l'analyse et le traitement du signal appliqué à l'imagerie non linéaire des milieux complexes. Dans un second temps, nous proposons de décrire quelques exemples d'utilisation des symétries pour l'interprétation de la méthode d'inversion d'impulsion, de sa généralisation ESAM[5] effectuée en vue d'une méthode de localisation de nonlinéarités par l'adjonction d'une analyse DORT.

2 Symétries intrinsèques d'un système : groupes de Lie

Toute équation physique ($\mathcal{E}$) décrivant un système ($\mathcal{S}$) possède de manière intrinsèque des symétries, c'est-à-dire des transformations de ses variables qui laisse sa forme inchangée : par exemple, les équations linéaires $\mathcal{E}(x) = 0$ possèdent toutes une symétrie du type $F(x) = Cx$ en raison du principe de superposition. L'intérêt de l'étude des symétries d'une équation qui dépendent d'un paramètre continu réside dans leur structure de groupe continu, ou groupe de Lie. Les outils théoriques en résultant garantissent la possibilité de réduire l'ordre des équations différentielles, d'extraire des invariants géométriques, voir de résoudre analytiquement les équations.

Soit une transformation $\tilde{x} = F(x, a)$ avec $x = F(x, a_0)$, avec a paramètre de groupe. Son générateur

infinitésimal est la fonction $\xi(x)$ telle que $F(x, a) = e^{(a-a_0)\xi(x)}$. Pour une équation aux dérivées partielles ou une équation aux dérivées ordinaires d'ordre $n > 1$, il est possible de déterminer l'ensemble des générateurs infinitésimaux de symétries de l'équation de manière systématique, en résolvant l'équation de détermination de $(\mathcal{E})$ [1]. On note ξ_i (resp. η_i) les générateurs infinitésimaux correspondant aux variables indépendantes (resp. dépendantes) de $(\mathcal{E})$. Les équations caractéristiques, données par

$$dx_1/\xi_1 = \dots = dx_p/\xi_p = dy_1/\eta_1 = \dots = dy_q/\eta_q, \quad (1)$$

où les x_i sont les variables indépendantes et y_i les variables dépendantes, permettent d'extraire $n - 1$ invariants de l'équation $(\mathcal{E})$ qui, exprimée entièrement en fonction de ces nouvelles variables, est alors réduite d'un ordre, c'est-à-dire simplifiée. Cette approche permet d'associer la transformation de Hopf-Cole conduisant à la résolution de l'équation de Burgers aux invariants de son groupe de symétrie associé[1, p.530]. Elle permet également de retrouver les variables de similitude associées aux équations KZ, KZK, TBE utilisées pour modéliser et simuler la propagation non linéaire de champs acoustiques[4].

2.1 Symétrie de l'équation des ondes sphériques

À titre d'exemple, prenons l'équation de propagation acoustique des ondes en hypothèse linéaire donnée par

$$\mathcal{E}(t, \theta, r, \phi, u) = \Delta u - c_0^2 u_{tt} = 0, \quad (2)$$

où c_0 est la célérité de l'onde et où Δ est le Laplacien. Si le problème possède une condition *a priori* de symétrie sphérique, $u(t, r, \theta, \phi) = u(t, r)$, (2) devient

$$2u_r(t, r)/r + u_{rr}(t, r)c_0^2 u_{tt}(t, r) = 0, \quad (3)$$

avec 2 variables indépendantes (t, r) et une variable dépendante (u) . Pour résoudre cette équation, il est communément admis¹ que le changement de variable de la forme

$$\Psi(t, r) = ru(t, r) \quad (4)$$

transforme (3) en une équation d'onde plane $\Psi_{tt}(t, r) - c_0^2 \Psi_{rr}(t, r) = 0$ et permet d'extraire la solution générale $u(t, r) = \frac{1}{r} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]$. Les 3 générateurs infinitésimaux (ξ_1, ξ_2, η) sont extraits grâce à l'algorithme de recherche systématique des symétries[4] et sont donnés par $\xi_1(t, r, u) = C_1 + C_2 t$, $\xi_2(t, r, u) = C_3 + C_2 r$, $\eta(t, r, u) = (C_4 - C_3/r)u + v(t, r)$, où les C_i sont des constantes et $v(t, r)$ est une solution de (3). Le groupe de Lie associé à ces générateurs est donc un groupe à quatre paramètres, étendu sur les quatre opérateurs X_i suivants : $X_1 = \partial_t$, $X_2 = r\partial_r + t\partial_t$, $X_4 = u(\partial_u)$, $X_3 = \partial_r - u/r\partial_u$. Les équations caractéristiques (1) correspondants à l'opérateur X_3 sont alors $dt/0 = dr/1 = \frac{du}{-u/r}$, conduisant à $dr/r = -du/u$. Un invariant qui couple la variable indépendante u et la variable dépendante r de (3) est donc donné par $\Psi = ru(t, r)$, et l'on retrouve le changement de variable

(4). Une origine physique de ce changement de variable est donc la conséquence des propriétés de symétries *a priori* supposées de l'équation (2).

3 Symétries *a priori* de l'excitation d'un système

Les symétries géométriques *a priori* peuvent être complétées par les symétries *a priori* d'excitation.

3.1 Symétries de la méthode d'inversion d'impulsion

Soit un système non linéaire $(\mathcal{S})$ dont la réponse $y(t)$ à l'excitation $x(t)$ est donnée par :

$$y(t) = \mathcal{NL}[x(t)] = N_1 x(t) + N_2 x^2(t), \quad (5)$$

où N_1 et N_2 sont respectivement les coefficients linéaires et du second ordre. Si on applique les deux excitations $X_E = x(t)$ et $X_I = -x(t)$, on peut extraire N_1 et N_2 à l'aide des réponses non linéaires $Y_E(t)$ et $Y_I(t)$ avec

$$N_1 = \frac{Y_E(t) - Y_I(t)}{2x(t)}, \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{Y_E(t) + Y_I(t)}{2x^2(t)}. \quad (7)$$

La méthode d'inversion d'impulsion utilisée en instrumentation Doppler classique consiste à utiliser la relation (7) afin d'extraire la signature de la nonlinéarité N_2 . En terme de groupes de symétries, les excitations X_E and X_I peuvent être associées à l'élément neutre E et à l'inversion I du groupe ponctuel C_2 (Table 1). Les quantités $\Phi_{A_g} = Y_E(t) + Y_I(t)$ et $\Phi_{A_u} = Y_E(t) - Y_I(t)$ peuvent être interprétées comme les fonctions propres du système. En effet, $\Phi_{A_g} = 2N_2 x^2(t)$ et $\Phi_{A_u} = 2N_1 x(t)$ permettent de séparer la partie linéaire et non linéaire de la réponse.

C_2	E	I	C_2	E	I
E	E	I	A_g	1	1
I	I	E	A_u	1	-1

TABLE 1 – Table de multiplication (à gauche) et table de caractères (à droite) du groupe ponctuel C_2 . La colonne du haut indique les éléments du groupe : E est l'identité, I est l'inversion ou une rotation d'angle π . Les représentations irréductibles paire A_g et impaire A_u sont présentées avec leurs caractères respectifs.

3.2 Généralisation : symétrisation *a priori* de l'excitation

La généralisation de l'approche précédente a conduit à la définition d'une méthode systémique de symétrisation de l'excitation ESAM[5]. Elle consiste à déterminer les conditions *a priori* optimales d'excitation afin d'identifier les paramètres d'un système $(\mathcal{S})$ d'ordre 3 donné par :

$$y(t) = \mathcal{NL}[x(t)] = N_1 x(t) + N_2 x^2(t) + N_3 x^3(t), \quad (8)$$

1. L'origine physique de ce changement de variable est souvent habilement éludé !

où N_3 est le coefficient d'ordre 3. L'objectif est de séparer les signatures non linéaires d'ordre 3 présentes dans les milieux fortement non linéaires (milieux à bulles, défauts ou diffuseurs à nonlinéarité non classique) des nonlinéarités d'instrumentation. Appliquons la même méthode en utilisant les propriétés du groupe C_3 des rotations d'ordre 3. La généralisation de la méthode pré-

C_3	E	ϵ	ϵ^*	C_3	E	ϵ	ϵ^*
E	E	ϵ	ϵ^*	A_1	1	1	1
ϵ	ϵ	ϵ^*	E	A_2	1	1	-1
ϵ^*	ϵ^*	E	ϵ	E_1	2	-1	0

TABLE 2 – Table de multiplication (à gauche) et table de caractères (à droite) du groupe ponctuel C_3

cédente est alors faite en utilisant la transformation définie par l'opérateur U_g associé à l'élément du groupe g , et agissant sur l'excitation initiale $x(t)$ de façon à construire les nouvelles excitations symétrisées X_g :

$$X_E = U_E(x(t)) = x(t), \quad (9)$$

$$X_\epsilon = U_\epsilon(x(t)) = x(t)e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad (10)$$

$$X_{\epsilon^*} = U_{\epsilon^*}(x(t)) = x(t)e^{-\frac{2i\pi}{3}}. \quad (11)$$

Comme pour le cas de la méthode d'inversion d'impulsion, la seconde étape consiste à définir les fonctions propres Φ_m via les propriétés du groupe C_3 données en Table 2. Elles sont directement issues des fonctions de base des représentations irréductibles $\Phi_m = \sum_{g \in C_3} \chi_m(g) Y_g$, où $\chi_m(g)$ est le caractère associé à l'élément g de la représentation irréductible m (Table 2), et $Y_g = NL[X_g]$ est la réponse non linéaire de $\mathcal{S}$ à l'excitation propre X_g définie par (9-11) :

$$\Phi_{A_1} = 3N_3x^3, \quad (12)$$

$$\Phi_{A_2} = N_3x^3 - 2\epsilon [N_2x^2 + \epsilon N_1x], \quad (13)$$

$$\Phi_E = N_3x^3 + (2 - \epsilon^*)N_2x^2 + (2 - \epsilon)N_1x. \quad (14)$$

Cette méthode de symétrisation de l'excitation (ESAM) permet, en utilisant la relation (12) associée à la représentation complètement symétrique A_1 , l'extraction de la composante non linéaire N_3 sans perturbation des termes N_1 and N_2 , qui pourront être extraits avec la méthode d'inversion d'impulsion classique.

4 Mise en place expérimentale d'ESAM

La mise en oeuvre expérimentale d'ESAM nécessitant des excitations réelles, une méthode analogue à une modulation d'amplitude peut être choisie pour déterminer les paramètres N_2 and N_3 donnés par

$$\begin{pmatrix} s_1(t) = N_1x(t) \\ s_2(t) = N_2x^2(t) \\ s_3(t) = N_3x^3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathcal{M} \begin{pmatrix} y_E \\ y_A \\ y_{B1} \\ y_{B2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

pour lesquels y_E , y_A , y_{B1} et y_{B2} sont les réponses $y_i(t) = \mathcal{NL}[x_i(t)]$ aux excitations $x_E(t) = x(t)$, $x_A(t) = -\frac{1}{2}x(t)$, $x_{B1}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(t)$, $x_{B2}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x(t)$. Comme dans le cas des réponses complexes Φ_m (Eqs. (12-14)), les réponses dépendent (comme tout système non linéaire) de l'excitation $x(t)$ et de ses puissances $x^i(t)$. Pour pouvoir introduire la notion d'étalonnage de cette caractérisation des paramètres non linéaires N_2 et N_3 , les énergies $\mathcal{E}_{0i} = \int_{-\infty}^{\infty} |x^i(t)|^2 dt$ des signaux $x^i(t)$ sont calculées et permettent l'extraction (étalonnée) des paramètres N_1 , N_2 et N_3 avec $\mathcal{E}_j = \int_{-\infty}^{\infty} |s_j(t)|^2 dt = N_j^2 \mathcal{E}_{0j}$. Les coefficients N_1 , N_2 et N_3 sont alors directement évalués par :

$$N_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_{01}}}; \quad N_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}}}; \quad N_3 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_{03}}}. \quad (17)$$

4.1 Localisation ESAM-DORT

Lorsque les signaux analysés contiennent des nonlinéarités provenant de défauts (ou diffuseurs) localisés spatialement dans le milieu de propagation, les signatures non linéaires N_2 et N_3 se retrouvent donc localisées temporellement dans les signaux propres $s_j(t)$ calculés à partir des réponses acoustiques temporelles $y_i(t)$. La localisation de ces diffuseurs non linéaires peut donc se faire en utilisant une matrice d'émission-reception sur laquelle ESAM sera appliquée. Grâce à une méthode de type DORT[6], la localisation spatiale sera effectuée. Si l'on considère K émetteurs E_k , $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, et M récepteurs R_m , $m \in \{1, 2, \dots, M\}$, l'élément $K_{mk}(t)$ de la matrice $K(t)$ (dimension $K \times M$) est construite à partir de la réponse R_m émise par E_k . Dans le domaine de Fourier, la matrice de transfert $K(f) = \mathcal{F}[K(t)](f)$ est obtenue, et les opérateurs de retournement temporel $T_{Tx}(f)$, $T_{Rx}(f)$ sont calculés par :

$$T_{Tx}(f) = K^*(f)K(f) \in \mathbb{C}^{K,K}, \quad (18)$$

$$T_{Rx}(f) = K(f)K^*(f) \in \mathbb{C}^{M,M}. \quad (19)$$

La décomposition en valeurs singulières $K(f) = U(f)\Sigma(f)V^*(f)$, avec $U(f)$ matrice $M \times M$ des vecteurs propres de $T_{Rx}(f) = K(f)K^*(f)$, et $V(f)$ matrice $K \times K$ des vecteurs propres de $T_{Tx}(f) = K^*(f)K(f)$, permet d'extraire les valeurs singulières $\sigma_d(f) = \Sigma_{dd}(f) \neq 0$, avec $d \in \{1, 2, \dots, D\}$. Les fonctions de Green associées au diffuseur S_d sont alors données par :

$$\mathbf{g}_d^{(R)}(f_0) = U_{\bullet d}(f_0) \in \mathbb{C}^M, \quad (20)$$

$$\mathbf{g}_d^{(T)}(f_0) = V_{\bullet d}(f_0) \in \mathbb{C}^K, \quad (21)$$

$$\sigma_d(f_0) = \Sigma_{dd}(f_0) \in \mathbb{R}^*, \quad (22)$$

avec $U_{\bullet d}$ (resp. $V_{\bullet d}$) indiquant la colonne d de la matrice U (resp. V). Dans le cas où le diffuseur S_d est caractérisé par une réponse non linéaire présente à $2f_0$ et $3f_0$, les valeurs propres $\sigma_d(f)$ posséderont la signature aux fréquences $2f_0$ et $3f_0$. En définissant les matrices $K^{(E)}(t)$, $K^{(A)}(t)$, $K^{(B1)}(t)$ and $K^{(B2)}(t)$ associées aux excitations propres, les signatures non linéaires $N_i^{(d)}$ sont extraites à partir de

$$e_{d,km}^{(i)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\sigma_d^{(i)}(f) \cdot g_{d,k}^{(T,i)}(f) \cdot g_{d,m}^{(R,i)}(f) \right], \quad (23)$$

avec $g_{d,k}^{(T,i)}(f)$ l'élément k de $\mathbf{g}_d^{(T,i)}(f)$. L'énergie $\mathcal{E}_i^{(d,km)} = \int_{-\infty}^{\infty} |e_{d,km}^{(i)}(t)|^2 dt$ permet d'extraire les paramètres $N_i^{(d)}$ à partir de $N_i^{(d,km)} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_i^{(d,km)}}{\mathcal{E}_{0i}}}$, où $\mathcal{E}_{0i}$ représente l'énergie initiale utilisée dans ESAM. Cette énergie $\mathcal{E}_{0i}$ peut être interprétée comme la signature du processus d'étalonnage de la nonlinéarité pour une extraction calibrée des paramètres N_2 and N_3 . Par la suite, la signature temporelle localisée du diffuseur non linéaire peut alors être intégrée dans un processus de localisation par tomographie en vue de l'imagerie du diffuseur non linéaire[7].

4.2 Symétrie et retournement temporel

Pour décrire algébriquement l'invariance par retournement temporel (TR), on peut appliquer l'opérateur T_- au système décrit par les équations de Lagrange en formulation algébrique[4], soit

$$T_- \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(t, q_i, \dot{q}_i) \mathcal{L} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right] T_- \mathcal{L}, \quad (24)$$

avec $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(t, q_i, \dot{q}_i)$ l'opérateur linéaire appliqué au Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - U(q_i)$. Dans ce cas,

$$T_- \mathcal{O}_{\mathcal{L}} \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(-t, q_i, \dot{q}_i) T_- \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}} T_- \mathcal{L}, \quad (25)$$

indiquant que si $q_i(t)$ est solution, alors $q_i(-t)$ l'est aussi. On retrouve ainsi que d'un point de vue général, les équations de Lagrange avec un champs de forces dérivant d'un potentiel sont invariantes par retournement temporel. Les opérateurs T_- et T_-^{-1} forment un groupe isomorphe au groupe de l'inversion C_2 qui intervient également dans le processus d'inversion d'impulsion décrit en première partie, et permettent l'extraction des signatures non linéaires dans les techniques de spectroscopie non linéaires NEWS[4].

4.3 Symétries par corrélation d'excitation

La mise en application de l'analyse et des propriétés de symétries trouvent leur applications pratiques lors des processus d'optimisation par processus de codage d'excitation des méthodes TR-NEWS[4]. Ainsi les méthodes utilisant des excitations de type chirp-coded utilisent une propriété de symétrie d'invariance associée à la réponse temporelle des systèmes. En effet, la réponse linéaire acoustique $y(t)$ provenant de l'excitation $c(t) = A \cos(2\pi f(t)t)$ avec $f(t) = At + f_0$ est donnée par $y(t) = h(t) * c(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-t') c(t') dt'$, avec $h(t)$ la réponse impulsionnelle du milieu de propagation. La corrélation $\Gamma(t) = \int_{\Delta t} y(t-t') c(t') dt' \simeq h(t) * c(t) * c(-t)$, calculée durant Δt , est alors proportionnelle à $h(t)$ si $\Gamma_c(t) = c(t) * c(-t) = \delta(t)$, ce qui est approximativement le cas pour $c(t)$ si la bande Δf de variation de la fréquence $f(t)$ est suffisamment large. Avec ces hypothèses, $\Gamma(t) \sim h(t)$ peut être considérée comme la réponse impulsionnelle du milieu. Si $\Gamma(t)$ est temporellement retournée et utilisée comme nouvelle excitation, la réponse $y_{TR}(t) = \Gamma(-t) * h(t) = \Gamma_h(t)$, (i) exprime la fonction d'autocorrélation du système, (ii) possède les propriétés de symétries classiques des fonctions

d'autocorrélation linéaires, et (iii) est indépendante de l'excitation $c(t)$. Cette approche est valable si aucune nonlinéarité n'est présente dans le milieu de propagation. En présence de nonlinéarités, l'invariance par rapport à l'amplitude d'excitation A et surtout la symétrie de la fonction d'autocorrélation $y_{TR}(t)$ sera brisée par la présence de termes additifs pouvant s'exprimer par $y_{NL}(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t') c(t-t') dt' + \int_{\mathbb{R}} h_1(t', t'') c(t-t') c(t-t'') dt' dt'' + \dots$, où les noyaux $h(t')$, $h_1(t', t'')$ sont associés aux séries de Volterra. La fonction d'autocorrélation $\Gamma(t)$ étant invariante par un changement de $c(t)$ en $-c(t)$, c'est avec l'utilisation de la relation (6) que l'on pourra extraire la signature de la présence de nonlinéarité dans le milieu de propagation, alors qu'il faut utiliser (7) dans le cas de la méthode d'inversion d'impulsion.

Conclusion

Quelques exemples d'utilisation de groupes continus de Lie et de groupes ponctuels de symétrie ont permis de proposer une approche systémique d'analyse en acoustique non linéaire. L'utilisation de symétries *a priori* d'excitation permet d'envisager une approche traitement du signal qui trouve déjà quelques applications en imagerie non linéaire des milieux complexes.

Références

- [1] B. J. Cantwell, *Introduction to Symmetry Analysis*, C. U. Press, Ed. Cambridge University Press (612 pages), 2002.
- [2] A. O. Maksimov, "Symmetry in bubble dynamics," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 9, no. 1, pp. 83–92, 2004.
- [3] S. Dos Santos, "Symmetry of nonlinear acoustics equations using group theoretic methods : a signal processing tool for extracting judicious physical variables," in *Proceedings of the Joint Congress CFA/DAGA '04*, Strasbourg, 2004, pp. 549–550.
- [4] S. Dos Santos, "Instrumentation ultrasonore des milieux complexes : une approche non linéaire pour une caractérisation acoustique sub-lambda," Ph.D. dissertation, Habilitation à Diriger des Recherches, Université François-Rabelais de Tours, 14-Nov 2008.
- [5] S. Dos Santos and C. Plag, "Excitation symmetry analysis method (ESAM) for calculation of higher order nonlinearities," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 43, pp. 164–169, 2008.
- [6] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink, "Decomposition of the time reversal operator : Detection and selective focusing on two scatterers," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 99, pp. 2067–2076, 1996.
- [7] S. Dos Santos, S. Vejvodova, and Z. Prevorsevsky, "Local nonlinear scatterers signature using symbiosis of the time-reversal operator and symmetry analysis signal processing," *JASA Express Letters*, vol. accepted for publication, 2009.