

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans des guides hélicoïdaux soumis à un chargement axial

Ahmed Frikha¹, Fabien Treysède¹, Patrice Cartraud²

¹LCPC, Centre de Nantes, Route de Pornic, BP 4129, 44341 Bouguenais, France, ahmed.frikha@lcpc.fr

²GeM, ECN, BP 92101, 44321 Nantes, France.

Les ondes guidées sont utilisées pour contrôler des composants de grandes dimensions comme les plaques et tubes. Elles présentent l'avantage de se propager sur de longues distances avec peu de perte d'énergie. Néanmoins, l'interprétation des signaux mesurés est souvent délicate en raison de la nature multimodale et dispersive de ces ondes. Lors d'un essai de contrôle non-destructif (CND) par ondes guidées, la simulation est un outil susceptible de faciliter l'interprétation de ces signaux, voire d'optimiser les configurations de contrôle. Le but de ce travail est de modéliser la propagation des ondes élastiques dans des guides hélicoïdaux soumis à un chargement axial. Le CND des ressorts et des torons multi-brins est une application potentielle du modèle proposé. L'étude de la propagation des ondes dans un guide hélicoïdal sous chargement nécessite l'écriture des équations tridimensionnelles de la dynamique des structures précontraintes dans un système de coordonnées hélicoïdales. L'écriture de ces équations dans une base associée à l'hélice permet de rendre le problème invariant par translation le long de cette hélice. La méthode des éléments finis semi-analytiques (SAFE) peut ensuite être appliquée, réduisant ainsi le maillage à la section du guide (bidimensionnelle). Le problème aux valeurs propres obtenu peut être résolu en fixant le nombre d'onde ou la fréquence. Par ailleurs, le calcul de l'état précontraint statique est résolu par une méthode de type multi-échelle dans laquelle est prise en compte l'invariance hélicoïdale de la structure.

1 Introduction

Le CND par propagation d'ondes est considéré parmi les techniques les plus appréciées. En raison de la complexité des signaux, cette technique reste souvent restreinte à des géométries simples comme les plaques et les tubes. Dans le cadre de l'auscultation des câbles à sept brins non précontraint, des études expérimentales récentes ont été réalisées [1, 2]. En présence de précontrainte, seuls quelques travaux expérimentaux ont été menés [3, 4]. La complexité des résultats est en partie liée à la géométrie hélicoïdale des brins périphériques et à la précontrainte. Dans le cadre de la propagation des ondes dans un guide hélicoïdal, des modèles utilisant les éléments finis périodiques [5] ou la méthode SAFE [6] ont été développés et validés. La méthode SAFE est considérée parmi les techniques les plus simples pour l'obtention numérique des modes d'un guide d'ondes. Cette technique a été largement utilisée pour les guides droits de section arbitraire [7, 8, 9]. Une étude sur les guides toroïdaux a été présentée par Demma et al. [10]. Une extension de la méthode a été faite pour étudier les guides d'ondes torsadés dans [11]. Des travaux récents présentent le développement de la méthode SAFE pour les torons à sept brins [12, 13]. Dans ce papier, la méthode SAFE est étendue pour étudier les torons à sept brins soumis à un chargement axial. Pour le calcul de l'état précontraint, une méthode de type multi-échelle est développée.

2 Théorie

2.1 Formulation variationnelle de la dynamique des structures précontraintes

On considère un matériau élastique linéaire en petite déformation avec une dépendance harmonique en $e^{-i\omega t}$. D'après l'hypothèse des petites perturbations, la formulation variationnelle 3D qui décrit le mouvement d'une structure précontrainte est donnée par [14] :

$$\int_{V_0} \delta \epsilon : C : \epsilon dV_0 + \int_{V_0} \text{tr}(\nabla \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u})^T) dV_0 - \omega^2 \int_{V_0} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV_0 = 0, \quad (1)$$

pour tout $\delta \mathbf{u}$ cinématiquement admissible. $\mathbf{u}$, ϵ , $\mathbf{C}$ et $\boldsymbol{\sigma}_0$ désignent respectivement le vecteur des déplacements, le tenseur des déformations, le tenseur des modules d'élasticité et le tenseur des précontraintes. ρ est la densité du matériau et V_0 représente le volume de la structure précontrainte. Les opérateurs $\text{tr}(\cdot)$ et ∇ représentent respectivement la trace et le gradient calculés par rapport aux coordonnées actualisées de l'état d'équilibre précontraint.

2.2 Système de coordonnées hélicoïdales

On considère un guide d'onde hélicoïdal dont la section est maintenue constante le long de l'axe. L'axe de l'hélice peut être décrit par le vecteur position suivant (voir figure 1) :

$$\mathbf{r}(s) = R \cos\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \mathbf{e}_x + R \sin\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \mathbf{e}_y + \frac{l}{l} s \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

où $l = \sqrt{(L^2 + 4\pi^2 R^2)}$ est la longueur curviligne d'une spire selon l'hélice. $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ désigne la base orthogonale cartésienne. R et L sont respectivement le rayon de l'axe dans le plan cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et la longueur d'une spire de l'hélice le long de l'axe $\mathbf{e}_z$. Le paramètre s , correspondant à la longueur de l'arc, varie entre 0 et l . Pour une hélice, la courbure $\kappa = 4\pi^2 R/l^2$ et la tortuosité $\tau = 2\pi L/l^2$ sont constantes.

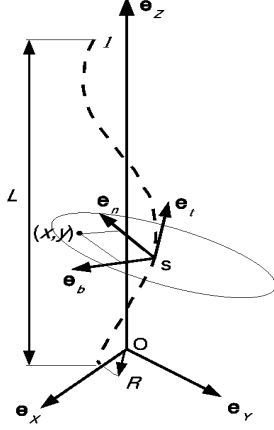


Figure 1: Axe central d'une hélicoïde et sa base locale

Les formules de Serret-Frenet donnent une base orthonormale $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$ associée à l'hélice, où $\mathbf{e}_t = d\mathbf{r}/ds$, $d\mathbf{e}_t/ds = \kappa\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{e}_n$.

Tout vecteur $\mathbf{x}$ peut être écrit dans la base de Serret-Frenet comme suit :

$$\mathbf{x}(x, y, s) = \mathbf{r}(s) + x\mathbf{e}_n(s) + y\mathbf{e}_b(s). \quad (3)$$

On définit ensuite une base covariante non orthogonale notée $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ associée à l'hélicoïde.

$\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ et $\mathbf{g}_3$ sont donnés par $\mathbf{g}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial x$, $\mathbf{g}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial y$ et $\mathbf{g}_3 = \partial\mathbf{x}/\partial s$. On définit respectivement la base contravariante $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$, où les vecteurs sont donnés par $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$. Le tenseur métrique covariant $\mathbf{g}$, dont les coefficients sont définis par $g_{mn} = \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_n$, est donné par :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tau y \\ 0 & 1 & \tau x \\ -\tau y & \tau x & \tau^2(x^2 + y^2) + (1 - \kappa x)^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

On remarque que le tenseur métrique covariant ne dépend pas de la variable curviligne s . En supposant que la section du guide ainsi que les propriétés du matériau ne varient pas le long de s , on peut conclure que le guide hélicoïdal possède une invariance par translation selon s dans ce système de coordonnées curvilignes.

Pour un guide d'ondes hélicoïdal de section circulaire, la section ne varie pas selon l'axe curviligne. En conséquence, l'invariance par translation est bien vérifiée en utilisant le système de coordonnées hélicoïdal ($\kappa = 4\pi^2 R/l^2, \tau = 2\pi L/l^2$). Le système de coordonnées tournant ($\kappa = 0, \tau = 2\pi/L$) nous permet aussi de considérer l'invariance par translation selon l'axe $\mathbf{e}_z$ pour

un brin hélicoïdal, ainsi que pour un brin droit [12]. En conséquence, ce système de coordonnées vérifie l'invariance par translation pour un toron à sept brins.

2.3 Méthode éléments finis semi-analytique (SAFE)

Tous les quantités de la formulation variationnelle présentée par l'équation (1) doivent être écrites dans le système de coordonnées hélicoïdales.

Les composantes covariantes de $\nabla \mathbf{u}$ dans la base contravariante, notées γ_{ij} , s'écrivent comme suit :

$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \Gamma_{ij}^k u_k$ où le symbole de Christoffel du second ordre est défini par $\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}^k$. Le tenseur des déformations ϵ est donné par : $\epsilon = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$. Dans la base de Serret-Frenet, le vecteur contenant les composantes du tenseur gradient $\{\gamma\} = \{\gamma_{nn}, \gamma_{nb}, \gamma_{nt}, \gamma_{bn}, \gamma_{bb}, \gamma_{bt}, \gamma_{tn}, \gamma_{tb}, \gamma_{tt}\}$ ainsi que le vecteur des déformations $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{nn}, \epsilon_{bb}, \epsilon_{tt}, 2\epsilon_{nb}, 2\epsilon_{nt}, 2\epsilon_{bt}\}$ s'écrivent en fonction du vecteur déplacement $\{u\} = \{u_n, u_b, u_t\}$ comme suit :

$$\{\gamma\} = (\mathbf{G}_{xy} + \partial/\partial s \mathbf{G}_s) \{u\}, \quad \{\epsilon\} = (\mathbf{L}_{xy} + \partial/\partial s \mathbf{L}_s) \{u\}, \quad (5)$$

où les opérateurs $\mathbf{L}_{xy}$ et $\mathbf{L}_s$ ont été présentés par [6].

$\mathbf{G}_{xy}$ et $\mathbf{G}_s$ sont donnés par les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{G}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \Delta & -\frac{\tau}{1-\kappa x} & \frac{\kappa}{1-\kappa x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\tau}{1-\kappa x} & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\kappa}{1-\kappa x} & 0 & \Delta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

et

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-\kappa x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\kappa x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\kappa x} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{où } \Delta = \frac{\tau}{1-\kappa x} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Puisque le système possède une invariance par translation selon s , une transformée de Fourier dans la direction s peut être effectuée. Le vecteur des déplacements et son champ test sont donnés par : $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) e^{i(ks - \omega t)}$, $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(x, y) e^{-i(ks - \omega t)}$. L'exponentielle e^{iks} peut être séparée de toutes les composantes, et $\partial/\partial s$ est remplacé par ik , où k est le nombre d'onde axial (le long de l'axe de l'hélice). La méthode SAFE peut être appliquée (voir [6] pour plus de détails pour les structures non précontraintes).

La discrétisation par éléments finis de la formulation variationnelle donnée par l'équation (1) peut se mettre sous forme d'un problème aux valeurs propres comme suit :

$$[\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} + i k (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3] \mathbf{U} = 0 \quad (8)$$

où le vecteur colonne $\mathbf{U}$ contient les degrés de libertés en déplacements.

La relation qui relie le vecteur des contraintes au vecteur des déformations est $\{\sigma\} = \mathbf{C} \{\epsilon\}$, où $\{\sigma\} = \{\sigma_{nn} \ \sigma_{bb} \ \sigma_{tt} \ 2\sigma_{nb} \ 2\sigma_{nt} \ 2\sigma_{bt}\}$. $\mathbf{C}$ représente dorénavant la matrice qui relie le vecteur des déformations au vecteur des contraintes (et non plus le tenseur C_{ijkl}).

Les matrices élémentaires de l'équation (8) sont données par:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} (\mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{xy} + \mathbf{G}_{xy}^T \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{G}_{xy}) \mathbf{N}^e dS, \\ \mathbf{K}_2^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} (\mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s + \mathbf{G}_{xy}^T \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{G}_s) \mathbf{N}^e dS, \\ \mathbf{K}_{31}^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} (\mathbf{L}_s^T \mathbf{C} \mathbf{L}_s + \mathbf{G}_s^T \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{G}_s) \mathbf{N}^e dS, \\ \mathbf{M}^e &= \int_{S^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dS, \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mathbf{\Sigma}_0$ est donnée par la matrice de précontrainte de Cauchy σ_0 en diagonale comme suit :

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

La résolution de l'équation (8) permet de déterminer les modes de propagation. Pour ω fixé, le problème aux valeurs propres obtenu est quadratique pour déterminer k . Pour un nombre d'onde réel donné k , on obtient un problème aux valeurs propres linéaire pour déterminer ω^2 .

2.4 Calcul de l'état précontraint (statique)

La méthode de résolution multi-échelle consiste à déterminer les déplacements locaux, pour une déformation axiale appliquée, à l'aide de la matrice raideur $\mathbf{K}_1$ et de la force résultante $\mathbf{F}$. Ceci revient à déterminer le vecteur des prédéplacements $\mathbf{U}$ par la résolution du système $\mathbf{K}_1 \mathbf{U} = \mathbf{F}$.

Si on applique une déformation axiale $\bar{\epsilon}$, la force élémentaire est donné dans le système de coordonnées tournant ($\kappa=0, \tau=2\pi/L$) par l'équation suivante :

$$\mathbf{F}^e = - \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_{xy}^T \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\epsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{N}^e dS. \quad (10)$$

Le vecteur des prédéplacements calculé intervient dans le calcul de la propagation d'ondes d'une part par la déformation de la géométrie et d'autre part par la précontrainte σ_0 .

3 Résultats

Le matériau est supposé isotrope, sans atténuation matérielle.

Une validation du modèle statique pour un ressort hélicoïdal avec le modèle analytique de Ancker and Goodier [15] a été menée. Une validation en propagation d'ondes avec le modèle semi-analytique de poutre hélicoïdale de Timoshenko [16] a été faite. Dans ce papier, seules les résultats d'un câble à sept brins sont présentés.

Un toron à sept brins est constitué d'un brin central droit de rayon a et d'une couche de six brins hélicoïdaux. R_h est le rayon d'hélice qui correspond à la somme du rayon du brin central et du rayon du brin périphérique.

3.1 Validation du modèle statique

Dans cette section, une comparaison des résultats du modèles E.F. multi-échelle 2D avec ceux d'un modèle E.F. 3D [17] est présentée pour un toron en acier coefficient de Poisson 0.3. Pour une déformation axiale $\bar{\epsilon}$ appliquée sur un toron à sept brins, la raideur axiale $K_{\epsilon\epsilon}$ et le terme de couplage en torsion $K_{\theta\epsilon}$ du toron sont donnés en fonction de l'effort et du moment adimensionnel résultants F et M comme suit :

$$K_{\epsilon\epsilon} = \frac{F}{2\pi(1+\nu)\bar{\epsilon}} \left(\frac{a}{R_h} \right)^2, K_{\theta\epsilon} = \frac{M}{2\pi(1+\nu)\bar{\epsilon}} \left(\frac{a}{R_h} \right)^3 \quad (11)$$

Dans cette section, R_h est supposé égale à $2a$. La figure 2 (resp. 3) représente la superposition des résultats de la raideur axiale (resp. terme de couplage en torsion) du modèle E.F. multi-échelle avec celles du modèle E.F. 3D pour des torons d'angle variant entre 2.5° et 35° . On constate que les résultats du modèle E.F. 2D sont en bon accord avec ceux du modèle E.F. 3D.

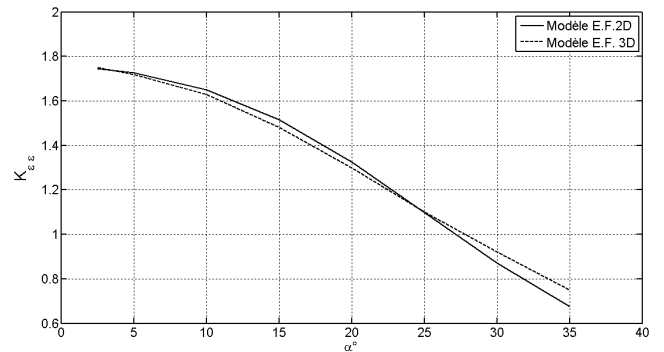


Figure 2: Raideur axiale, $K_{\epsilon\epsilon}$, en fonction de α

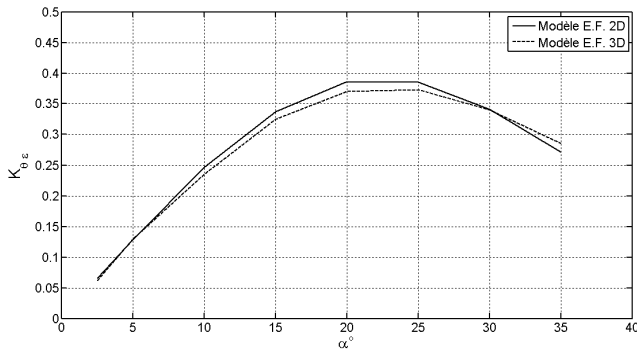


Figure 3: Terme de couplage en torsion adimensionnel, $K_{\theta\epsilon}$, en fonction de α

3.2 Courbes de dispersion

Dans cette section, R_h est supposé égale à $1.967a$ et l'angle est de 7.9° ($\kappa=0, \tau=0.0705$). Les propriétés du matériau sont comme suit : $E=2.17e11$ Pa, $\nu=0.28$, $\rho=7800$ kg/m³.

Le maillage de la section du toron est présenté en figure 4.

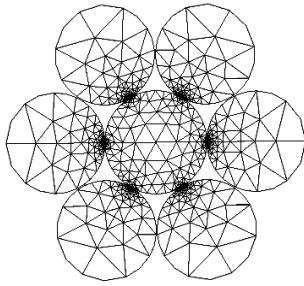


Figure 4: Maillage de la section du câble à sept brins

La figure 5 illustre les courbes de dispersion d'un câble à sept brins non précontraint. Le mode longitudinal qui possède la vitesse de groupe la plus élevée présente une bande de fréquences manquante (« notch frequency » [3]). Cette bande est située autour de la fréquence adimensionnelle de 0.35 (fig. 5) correspondant à une fréquence de 68 kHz pour un rayon du brin central égal à 2.7 mm. Le même phénomène est observé expérimentalement dans les travaux de Laguerre et al. [2], Kwun et al. [3].

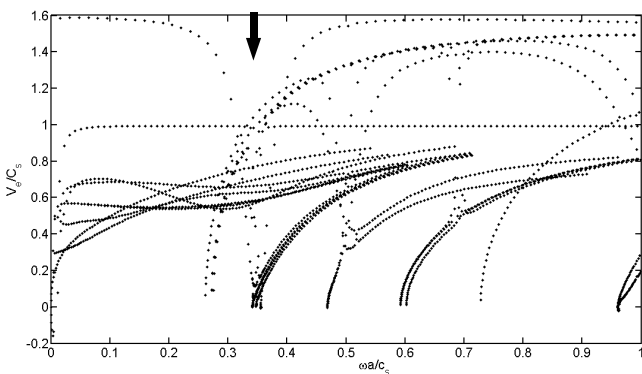


Figure 5: Courbes de dispersion d'un toron à sept brins non précontraint

La figure 6 illustre les courbes de dispersion dans un toron à sept brins soumis à une déformation axiale de 0.0088. Lors du calcul des modes de propagation, la géométrie précontrainte est réactualisée et la continuité du déplacement est imposée aux différents nœuds qui sont en contacts.

La bande de fréquences manquante a tendance à se décaler vers les hautes fréquences en fonction de la déformation appliquée. Pour une déformation de 0.0088, cette bande est située autour de la fréquence adimensionnelle de 0.45, correspondant à une fréquence de 87 kHz. Cette valeur correspond bien à celle trouvée expérimentalement dans [2]

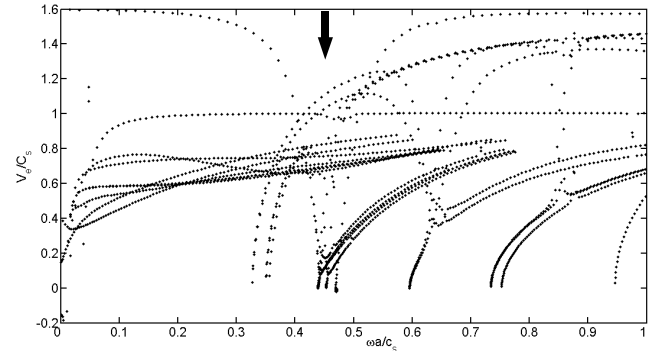


Figure 6: Courbes de dispersion d'un toron à sept brins soumis à une déformation appliquée de 0.0088

4 Conclusion

Dans ce papier, une méthode SAFE a été proposée pour analyser l'effet de la précontrainte sur la propagation d'onde dans un guide hélicoïdal. L'état précontraint statique a été modélisé grâce à une méthode de type multi-échelle. La modélisation de cet état a été validée par comparaison avec un modèle E.F. 3D proposé dans la littérature. Les courbes de dispersion d'un toron non précontraint et précontraint ont été calculées et une comparaison avec des résultats expérimentaux issus de la littérature a été effectuée. Pour un chargement appliqué, la bande de fréquence manquante se décale vers les hautes fréquences. Cette tendance concorde avec les résultats obtenus expérimentalement.

Références

- [1] Rizzo P., Lanza di Scalea F., "Wave propagation in multi-wire strands by wavelet-based laser ultrasound", *Experimental Mechanics* 44, 407-415 (2004).
- [2] Laguerre L., Aime J.-C., Brissaud M., "Magnetostrictive pulse-echo device for non-destructive evaluation of cylindrical steel materials using longitudinal guided waves", *Ultrasonics* 39, 503-514 (2002).
- [3] Kwun H., Bartels K.A., Hanley J.J., "Effects of tensile loading on the properties of elastic-wave propagation in a strand", *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 3370-3375 (1998).
- [4] Laguerre L., Brissaud M., Aime J.-C., "Dispositif de réflectométrie ultrasonore basse fréquence à base de transducteurs magnétoélastiques pour l'évaluation non destructive des barres et câbles d'acier", *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées* 239, 07-27 (2002).
- [5] Treysède F., "Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides", *J. Acoust. Soc. Am.* 121, 3398-3408 (2007).
- [6] Treysède F., "Elastic waves in helical waveguides", *Wave Motion* 45, 457-470 (2008).

- [7] Gavric L., "Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique", *Journal of Sound and Vibration* 185, 531–543 (1995).
- [8] Hayashi T., Song W.-J., Rose J.L., "Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example", *Ultrasonics* 41, 175–183 (2003).
- [9] Damljanovic V., Weaver R. L., "Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross-section", *J. Acoust. Soc. Am.* 115, 1572–1581 (2004).
- [10] Demma A., Cawley P., Lowe M., "The effect of bends on the propagation of guided waves in pipes", *Journal of Pressure Vessel Technology* 127, 328–335 (2005).
- [11] Onipede O., Dong S. B. "Propagating waves and end modes in pretwisted beams", *Journal of Sound and Vibration* 195, 313–330 (1996).
- [12] Treysède F., Laguerre L., "Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides", *Journal of Sound and Vibration* , in press (2009).
- [13] Treysède F., Frikha A. "A semi-analytical finite element method for elastic guided waves propagating in helical structures", *J. Acoust. Soc. Am.* 123(5), 3841–3841 (2008).
- [14] Bathe K.J., "Finite Element procedures", *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632*, 1996.
- [15] Ancker C.J., Goodier J.N., "Pitch and curvature corrections for helical springs", *Journal of Applied Mechanics* , 466-470 (1958).
- [16] Becker L.E., Chassie G.G., Cleghorn W.L., "On the natural frequencies of helical compression springs", *Mechanical Sciences* 44, 825–841 (2002).
- [17] Reza Ghoreishi S., Messenger T., Cartraud P. Davies P. "Validity and limitations of linear analytical models for steel wire strands under axial loading, using a 3D FE model", *International Journal of Mechanical Sciences* 49, 1251–1261 (2007).