

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Caractérisation spatiale du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones - Simulations

Baldrik Faure<sup>1</sup>, Olivier Chiello<sup>1</sup>, Marie-Agnès Pallas<sup>1</sup>, Christine Servière<sup>2</sup>

<sup>1</sup> INRETS, 25 avenue François Mitterrand Case 24, F-69675 Bron Cedex, {baldrik.faure, olivier.chiello, marie-agnes.pallas}@inrets.fr

<sup>2</sup> GIPSA-Lab, Domaine Universitaire BP 46, F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex, christine.serviere@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

Le bruit de roulement est la source de bruit principale des transports ferroviaires pour des vitesses inférieures à 300 km/h. L'objectif de cette étude est, à partir des signaux acoustiques mesurés par un réseau de microphones, de caractériser le champ acoustique rayonné par le rail pour évaluer sa contribution au bruit de roulement. Généré au niveau du contact entre la roue et le rail, cette composante du bruit résulte de la propagation d'ondes vibratoires plus ou moins atténuées dans le rail. Le champ acoustique rayonné présente des propriétés hétérogènes qui dépendent de la fréquence, des amplitudes des forces d'excitation, ainsi que des caractéristiques vibratoires du rail sur son support (atténuations, nombres d'onde).

Les méthodes classiques d'identification de sources par formation de voies ne sont pas adaptées à ce type de champ acoustique lié à une source étendue de grande longueur de cohérence. Dans cette étude, le rail est modélisé par une ligne de sources ponctuelles corrélées. Les paramètres déterminant le champ acoustique sont estimés par minimisation de l'erreur entre les matrices interspectrales mesurée et modélisée. Les principaux résultats des simulations sont présentés, et différentes hypothèses sur le modèle vibro-acoustique discutées.

## 1 Introduction

Dans un contexte de développement des transports ferroviaires urbains et péri-urbains, la réduction des nuisances sonores apparaît comme un enjeu majeur. Afin d'agir efficacement à la source, il est indispensable d'identifier et d'étudier les sources responsables de ces nuisances. Pour des vitesses inférieures à 300 km/h, le bruit de roulement constitue la source principale du bruit ferroviaire [1].

La modélisation du bruit de roulement a été initiée par Remington et reprise par Thompson [2], notamment à travers le modèle TWINS [3]. Dans ce modèle, le déplacement vertical relatif au niveau du contact roue/rail (dû aux irrégularités des surfaces de roulement) engendre des vibrations qui se propagent dans la voie. Le rayonnement acoustique des éléments tels que le rail, les roues et les traverses constitue le bruit de roulement. Ce modèle a montré que la contribution du rail au bruit de roulement reste importante pour des fréquences comprises entre 500 et 1200 Hz [2]. Ces prédictions ont en partie pu être observées lors de campagnes de mesures utilisant des méthodes dérivées du principe de formation de voies ; une source importante et étendue a été identifiée au niveau du rail [4]. Cependant, le principe du traitement d'antenne tel qu'il est utilisé actuellement est mal adapté à ce type de source [5]. En effet, le comportement vibro-acoustique du rail, en particulier la propagation de vibrations sur une très grande distance dans certaines gammes de fréquences, conduit à le considérer comme une source étendue ayant une grande longueur de cohérence.

Dans l'étude présentée ici, le rayonnement acous-

tique du rail est caractérisé par des paramètres vibratoires (amplitudes des excitations, nombres d'ondes complexes) que l'on cherche à estimer à l'aide d'un réseau de microphones. La méthode proposée consiste à minimiser l'erreur entre les matrices interspectrales modélisée et mesurée sur les microphones de l'antenne.

Dans un premier temps, le modèle vibro-acoustique retenu pour le rail est présenté. Les caractéristiques du champ acoustique qui en résultent sont ensuite étudiées. Enfin, par minimisation de l'erreur entre modèle et mesures, certains paramètres vibratoires sont évalués dans le cas simple d'une ou plusieurs excitations fixes, en ne considérant qu'un seul type d'onde vibratoire. Des résultats de simulations viennent appuyer et compléter l'étude analytique.

## 2 Modélisation du rail

### 2.1 Modèle vibratoire

Un modèle continu classique est adopté [6] dans lequel le rail est assimilé à une poutre épaisse de Timoshenko. Pour cette étude, une pose sur ballast est retenue. Les systèmes ballast-traverse-semelle sont modélisés par des impédances mécaniques localisées de type ressort-masse-ressort notées  $s(\omega)$ . Pour des longueurs d'onde inférieures à l'espacement  $a$  entre traverses (jusqu'à environ 1500 Hz), ces supports discrets peuvent être remplacés par un support continu de raideur linéique équivalente  $s'(\omega) = s(\omega)/a$ . Une représentation schématique de ce modèle est donnée figure 1.

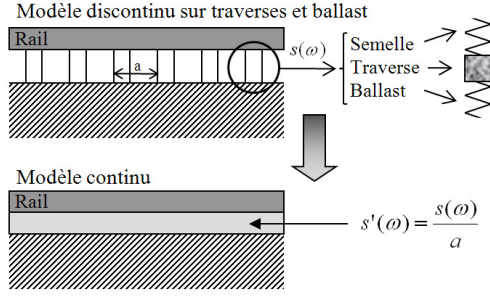


FIGURE 1 – Modélisation du rail sur son support

Lorsqu'il est excité par une force appliquée en un point, le rail est parcouru par des ondes vibratoires qui se propagent de part et d'autre du point d'excitation : des ondes de flexion, de compression, ou encore des ondes de torsion. Dans cette étude, seules les ondes de flexion verticale sont prises en considération. Le déplacement vertical du rail en réponse à une force unitaire en  $z_0$ , appelé fonction de Green, s'écrit [7] :

$$G_\omega(z, z_0) = F_d e^{-k_d |z - z_0|} + i F_p e^{-i k_p |z - z_0|} \quad (1)$$

Dans l'équation 1, on distingue deux types d'ondes de flexion qui peuvent se propager dans le rail, de part et d'autre de l'excitation. Elles sont caractérisées par une amplitude et un nombre d'onde complexe qui dépendent des paramètres physiques du rail et de son support (les paramètres utilisés dans cette étude sont donnés table 1). On peut ainsi distinguer :

- une onde potentiellement propagative d'amplitude  $F_p$  et de nombre d'onde complexe  $k_p$  ;
- une onde de champ proche d'amplitude  $F_d$  et de nombre d'onde complexe  $k_d$ . Cette onde fortement atténuée est également appelée onde évanesciente, elle existe dans un proche voisinage du point d'excitation.

| Rail                                            |                     | Support                                |                  |
|-------------------------------------------------|---------------------|----------------------------------------|------------------|
| Module d'élasticité ( $\text{N/m}^2$ )          | $2 \cdot 10^{11}$   | Masse d'une demie traverse (kg)        | 80               |
| Coefficient de pertes internes                  | $4 \cdot 10^{-3}$   | Raideur de la semelle ( $\text{N/m}$ ) | $3 \cdot 10^8$   |
| Module de cisaillement ( $\text{N/m}^2$ )       | $7.7 \cdot 10^{10}$ | Facteur de pertes dans la semelle      | $3 \cdot 10^7$   |
| Masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )             | 8000                | Raideur du ballast ( $\text{N/m}$ )    | $7.5 \cdot 10^7$ |
| Rigidité en flexion verticale ( $\text{Nm}^2$ ) | $6.4 \cdot 10^6$    | Facteur de pertes dans le ballast      | $3 \cdot 10^7$   |
| Masse par unité de longueur ( $\text{kg/m}$ )   | 60                  |                                        |                  |
| Coefficient de cisaillement                     | 0.4                 |                                        |                  |

TABLE 1 – Paramètres mécaniques de la voie [7]

La figure 2 représente l'atténuation en dB/m de ces deux ondes ainsi que les fréquences caractéristiques du système. Ces fréquences correspondent aux résonances des différents éléments de la voie. Pour une onde de type  $e^{-\gamma |z - z_0|}$ , l'atténuation  $\Delta$  en dB/m est calculée ainsi :  $\Delta = \Re(\gamma) \times 20 \log e$ . Avec  $\Re(\gamma)$  la partie réelle de  $\gamma$ .

## 2.2 Modélisation acoustique

Comme dans la référence [8], le rail est assimilé à une ligne de monopôles répartis continûment sur son axe comme le montre la figure 3.

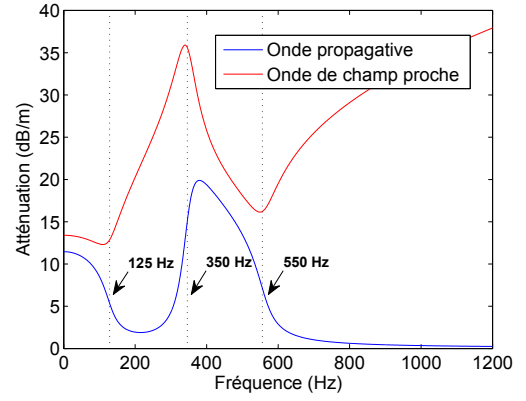


FIGURE 2 – Atténuation des ondes de flexion verticales dans le rail

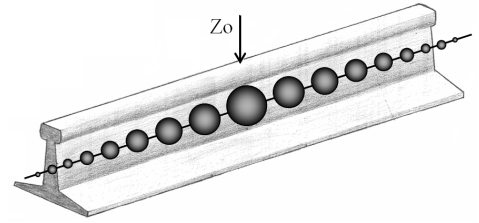


FIGURE 3 – Modélisation du rail par une ligne de sources ponctuelles

La pression acoustique en un point de l'espace de coordonnées cylindriques  $(r, z)$  est alors donnée par l'intégrale :

$$p(r, z) = \int_{z_s = -\infty}^{+\infty} i \omega dQ(z_s) \frac{e^{-i k r_s(z, z_s)}}{4 \pi r_s(z, z_s)} \quad (2)$$

avec :

$z_s$  l'abscisse d'un monopôle élémentaire sur l'axe  $z$ ,  
 $r_s$  la distance entre le monopôle d'abscisse  $z_s$  et le point d'observation.

$dQ(z_s)$  est le débit massique élémentaire de la source placée à l'abscisse  $z_s$  ; il est proportionnel à la vitesse vibratoire du rail en ce point. Pour effectuer le calcul numérique de la pression, l'intégrale (2) est discrétisée. La distance  $D_{z_s}$  entre deux monopôles successifs doit être suffisamment petite par rapport aux longueurs d'onde vibratoires dans le rail et dans l'air. Une précision suffisante est assurée pour :

$$D_{z_s} = \frac{1}{5} \min(\lambda_{air}, \lambda_{rail}) \quad (3)$$

en imposant  $D_{z_s} < 0.1 \text{ m}$  pour assurer une bonne estimation proche du rail.

Une source est placée en  $z_0$ , puis tous les  $D_{z_s}$  mètres de part et d'autre du point d'excitation jusqu'à atteindre 60 dB d'atténuation pour l'onde vibratoire propagative. L'amplitude de chaque source est proportionnelle à la vitesse vibratoire du rail, elle-même déterminée en utilisant le modèle décrit dans la section 2.1. Ainsi, les sources élémentaires sont cohérentes et les champs associés interfèrent ; ceci confère au champ acoustique résultant des propriétés particulières (cf. [8]).

### 3 Particularités du champ acoustique rayonné par le rail

La figure 2 montre que l'atténuation de l'onde propagative varie avec la fréquence de l'excitation. L'onde de champ proche est quant à elle fortement atténuée quelle que soit la fréquence. Les cartographies suivantes illustrent les conséquences de ces différents comportements sur le champ acoustique rayonné par le rail pour deux fréquences caractéristiques.

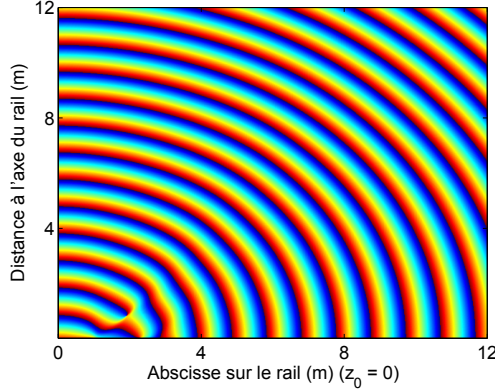


FIGURE 4 – Phase du champ acoustique rayonné par le rail à 350 Hz

Sur la figure 4, la phase du champ de pression est tracée pour  $f = 350$  Hz, lorsque l'atténuation de l'onde propagative est importante ( $\Delta = 16$  dB/m). Les fronts d'onde sphériques indiquent que le rail se comporte comme une source ponctuelle localisée au point d'excitation.

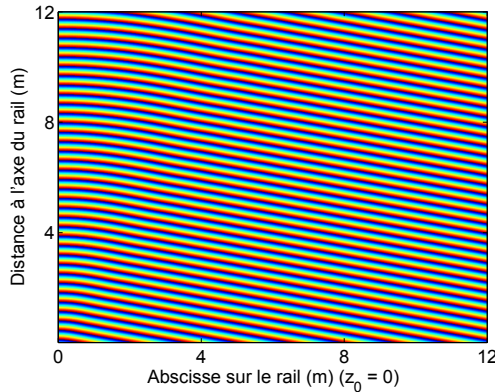


FIGURE 5 – Phase du champ acoustique rayonné par le rail à 1000 Hz

Sur la figure 5, la phase du champ de pression est tracée pour  $f = 1000$  Hz, fréquence pour laquelle l'onde propagative est peu atténuée ( $\Delta = 0.35$  dB/m). Les fronts d'onde plans indiquent que le rail se comporte comme une source étendue. Ces ondes cylindriques sont rayonnées suivant un angle par rapport à l'axe du rail. Appelé angle de directivité, cet angle est lié au rapport  $k_p/k$  ( $k$  est le nombre d'onde dans l'air) et varie donc avec la fréquence.

Entre ces cas extrêmes, le champ acoustique présente une structure spatiale intermédiaire complexe. Ceci

confirme que le choix d'un type de traitement d'antenne classique (onde sphérique ou onde cylindrique) n'est pas adapté au rail, dont le rayonnement possède des propriétés hétérogènes avec la fréquence. D'où la nécessité de développer de nouvelles méthodes.

### 4 Méthode d'optimisation paramétrique

Le champ de pression décrit précédemment est mesuré au moyen d'un réseau de  $N_{mic}$  microphones. Pour une fréquence  $f$ , on construit la matrice interspectrale  $\mathbf{\Gamma}$  de dimension  $N_{mic} \times N_{mic}$ . Parallèlement, une matrice spectrale modélisée  $\mathbf{\Gamma}^{mod}$  est calculée à partir du modèle vibro-acoustique décrit dans les sections 2.1 et 2.2. Elle dépend de plusieurs paramètres (amplitudes des forces de contact, nombres d'onde complexes dans le rail) que l'on cherche à déterminer par minimisation d'un critère basé sur l'erreur quadratique entre les matrices spectrales  $\mathbf{\Gamma}$  et  $\mathbf{\Gamma}^{mod}$  :

$$\Lambda = \sum_{m,n} |\mathbf{\Gamma}_{m,n} - \mathbf{\Gamma}_{m,n}^{mod}|^2 \quad (4)$$

où l'indice  $m, n$  indique l'élément de la matrice sur la ligne  $m$  et la colonne  $n$ .

#### 4.1 Cas simple : un seul contact d'amplitude inconnue

On considère dans un premier temps le cas d'un contact unique à l'abscisse  $z_0$ . Les nombres d'onde complexes dans le rail sont connus pour l'onde propagative et l'onde de champ proche ; les paramètres dynamiques de la voie ont par exemple été déterminés au marteau de choc. Seule l'amplitude du champ, liée à l'amplitude de l'excitation et au facteur de rayonnement, est inconnue. Pour ce cas simple, une écriture analytique de la solution du problème de minimisation est possible. Le champ de pression  $p(r, z)$  donné par l'équation (2) est proportionnel à un champ de pression élémentaire  $p_0(r, z)$  :

$$\begin{aligned} p(r, z) &= A \cdot p_0(r, z) \\ &= A \cdot \int_{z_s=-\infty}^{+\infty} -\omega^2 G_\omega(z_0, z_s) \frac{e^{-ikr_s(z, z_s)}}{4\pi r_s(z, z_s)} dz_s \end{aligned} \quad (5)$$

où  $A$  est l'amplitude complexe du champ élémentaire.

Le critère  $\Lambda$  peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{m,n} |\mathbf{\Gamma}_{m,n} - |A|^2 (P_0 \cdot P_0^\dagger)_{m,n}|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\mathbf{\Gamma}_{m,n} - |A|^2 \mathbf{M}_{m,n}|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

avec :

$P_0$  le vecteur des  $N_{mic}$  pressions élémentaires sur l'antenne

$\mathbf{M}$  la matrice spectrale élémentaire modélisée.

En posant  $|A|^2 = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ), le critère (6) atteint un minimum lorsque sa dérivée par rapport à  $\alpha$  est nulle :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sum_{m,n} \mathbf{M}_{m,n} \mathbf{\Gamma}_{m,n}^*}{\sum_{m,n} |\mathbf{M}_{m,n}|^2} \quad (7)$$

où  $\mathbf{\Gamma}_{m,n}^*$  est le conjugué de  $\mathbf{\Gamma}_{m,n}$ .

Remarque :  $A$  est supposé ici déterministe. Dans le cas d'une variable aléatoire, les expressions (6) et (7) restent valables : il suffit de substituer à  $|A|^2$  la variance  $\sigma_a^2$  de  $A$ .

## 4.2 Performances de l'estimateur en présence de bruit

Dans le cas où un bruit additif spatialement blanc, centré et de puissance moyenne  $\sigma^2$ , se superpose aux signaux mesurés, la matrice spectrale est donnée par :

$$\hat{\Gamma} = \Gamma + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_{mic}} \quad (8)$$

avec  $\mathbf{I}_{N_{mic}}$  la matrice identité de dimension  $N_{mic}$  (nombre de microphones).

En pratique,  $\hat{\Gamma}$  est estimée par une moyenne sur  $K$  observations. Soit  $\hat{\alpha}$  l'estimée de  $\alpha$  en présence de bruit. En utilisant les équations (7) et (8), on peut écrire le biais relatif (équation 9) et la variance relative (équation 10) de l'estimateur :

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha} = \frac{1}{N_{mic}} \cdot \frac{1}{R_{s/b}} \quad (9)$$

$$\frac{Var(\hat{\alpha})}{\alpha^2} = \frac{1}{K} \cdot \left[ \frac{2}{N_{mic} R_{s/b}} + \frac{1}{N_{mic}^2 R_{s/b}^2} \right] \quad (10)$$

où  $R_{s/b}$  est le rapport signal à bruit linéaire, défini par le rapport de  $\sigma^2$  et de la puissance moyenne sur les microphones de l'antenne.

Les équations (9) et (10) montrent que les performances de l'estimateur ne dépendent pas de la fréquence. Même lorsqu'il y a autant de bruit que de signal, l'erreur d'estimation sur  $\alpha$  reste inférieure à 1 dB en moyenne.

Sous cette hypothèse de bruit spatialement blanc, seule la diagonale des matrices spectrales porte la contribution du bruit, introduisant de ce fait le biais évoqué précédemment. Pour pallier à ce problème, il est possible de modifier le critère à minimiser, en excluant les éléments diagonaux des matrices spectrales. L'estimateur ainsi défini n'est plus biaisé, mais une attention toute particulière devra être portée aux résultats obtenus dans les cas plus complexes.

## 4.3 Performances de l'estimateur en présence d'erreurs sur le modèle

La méthode décrite précédemment repose sur la minimisation d'une erreur entre mesures et prévisions issues d'un modèle. Jusqu'à présent, les paramètres de ce modèle sont supposés connus, à l'exception de l'amplitude  $A$  de l'excitation. Cette partie présente les résultats d'une étude de robustesse vis-à-vis d'erreurs sur ces paramètres, sans bruit de mesure sur les microphones.

La matrice spectrale mesurée est simulée à partir du modèle vibro-acoustique. Pour la matrice spectrale modélisée, des erreurs sont introduites sur les paramètres suivants : position du contact, atténuation ou nombre d'onde de l'onde propagative. Dans les illustrations numériques, pour une fréquence  $f$  donnée l'antenne comporte 13 microphones, espacés de façon à vérifier le critère de Shannon spatial ( $d \leq \lambda_{air}/2$ ); sa longueur  $L$  est donc spécifique à chaque fréquence. L'antenne est disposée parallèlement au rail à 3 m de celui-ci. La position du centre de l'antenne  $z_c$  sur cet axe est un

paramètre qui varie de 0 à 5 m (l'origine  $z_c = 0$  étant face au contact  $z_0$ ).

Lorsqu'une erreur est introduite sur l'atténuation de l'onde propagative, la robustesse est vérifiée pour les fortes atténuations : pour une erreur de  $\pm 10$  dB/m sur l'atténuation, on constate moins de 1 dB d'erreur sur l'estimation de  $\alpha$ . Pour les faibles atténuations, une imprécision sur l'atténuation peut se traduire par une forte erreur sur l'estimation de  $\alpha$ , et ceci d'autant plus que l'antenne est excentrée du point de contact (figure 6). Plus généralement, c'est lorsque l'antenne est en face du contact que l'erreur d'estimation est minimale.

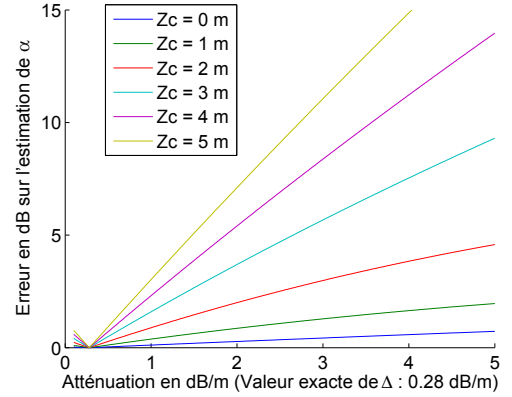


FIGURE 6 – Erreur d'estimation sur  $\alpha$  en fonction de l'erreur sur l'atténuation, à 1000 Hz ( $\Delta = 0.28$  dB/m)

Dans le cas d'une erreur sur le nombre d'onde de l'onde propagative, les observations sont similaires : bonne robustesse en basse fréquence, erreur d'estimation minimale lorsque l'antenne est en face du contact ( $z_c = 0$ ). En hautes fréquences, où les ondes rayonnées par le rail s'apparentent à des ondes planes (cf. section 3), l'angle de rayonnement mis en évidence est directement lié au nombre d'onde dans le rail [8]. Une erreur sur le nombre d'onde dans le rail équivaut à considérer un angle de rayonnement inexact au niveau du champ acoustique modélisé. La figure 7 illustre ce comportement à 1000 Hz. Les courbes sont similaires à celle de la réponse à une onde plane d'une antenne avec formation de voies : la méthode est d'autant moins robuste que l'ouverture  $L/\lambda$  de l'antenne est grande. Enfin, les

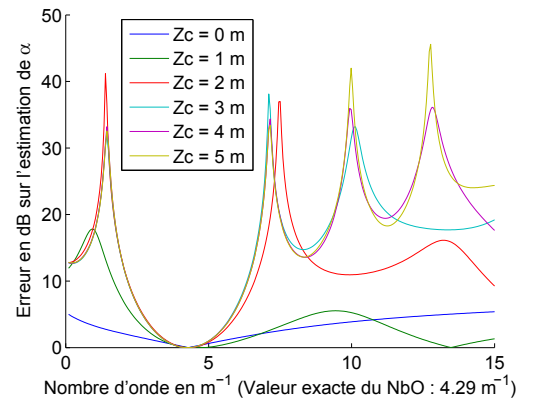


FIGURE 7 – Erreur d'estimation sur  $\alpha$  en fonction de l'erreur sur le nombre d'onde, à 1000 Hz ( $\Re(k_p) = 4.3$  m<sup>-1</sup>)



résultats montrent que la position  $z_0$  du contact est un paramètre à connaître avec précision, surtout pour les basses fréquences. En effet, en hautes fréquences, lorsque les ondes rayonnées par le rail sont planes, la position de l'antenne dans un tel champ invariant dans l'espace importe peu. En pratique, cette information de position du contact par rapport à l'antenne sera *a priori* assez bien connue.

## 4.4 Amplitude et atténuation inconnues

### 4.4.1 Étude du critère à minimiser

On suppose à présent que deux paramètres sont inconnus, à savoir l'amplitude de l'excitation et l'atténuation de l'onde propagative dans le rail. La solution de ce problème, par une approche de minimisation de l'erreur entre les matrices spectrales mesurée et modélisée, n'a pas de solution analytique simple. La résolution nécessite l'utilisation d'une méthode d'optimisation. Au préalable, nous analysons le comportement du critère à minimiser, et notamment l'existence éventuelle de minima locaux ou de zones plus vastes où la fonction coût varie faiblement autour de la solution. On considère une antenne microphonique de structure similaire à celle de la section 4.3.

Quelle que soit la fréquence observée, et quelle que soit la position  $z_c$  du centre de l'antenne par rapport au contact, on constate l'existence d'une vallée le long de laquelle  $\Lambda$  varie très peu. La figure 8 illustre cette remarque pour  $f = 550$  Hz et  $z_c = 3$  m; le critère  $\Lambda$  est tracé en échelle logarithmique sur une grande plage de variation pour l'amplitude et l'atténuation. La forme et l'orientation de la vallée dépendent de la fréquence et de la position de l'antenne. L'algorithme d'optimisa-

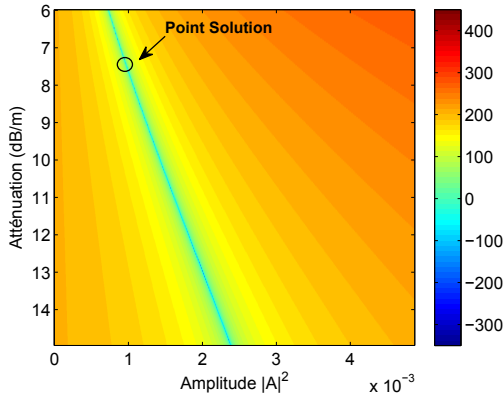


FIGURE 8 – Visualisation de  $\Lambda$  autour du point solution ( $f = 550$  Hz,  $z_c = 3$  m)

tion que nous utilisons dans un premier temps, est un algorithme de programmation séquentielle quadratique (méthode SQP), particulièrement adapté aux problèmes non linéaires sous contraintes comme le nôtre [9]. Même lorsque l'on initialise à proximité du minimum, l'algorithme converge vers une mauvaise solution quelle que soit le cas étudié (fréquence, position de l'antenne). Le problème ainsi défini est mal conditionné.

### 4.4.2 Utilisation de deux positions pour l'antenne

L'existence d'une vaste zone (ou vallée) où la fonction coût varie faiblement autour de la solution, indique que notre problème d'optimisation est mal conditionné. Pour surmonter cette difficulté, nous avons défini un nouveau critère utilisant deux jeux de matrices spectrales pour deux positions  $z_c$  du centre de l'antenne différentes. Soit  $\Lambda_1$  le critère calculé à la position  $z_{c1}$  et  $\Lambda_2$  le critère pour la position  $z_{c2}$ . On définit le critère suivant :

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \quad (11)$$

Ce choix d'utiliser deux positions d'antenne différentes est motivé par le fait que lors de mesures *in situ*, le véhicule se déplace par rapport à l'antenne. Dans cet article, les signaux sont certes supposés stationnaires, mais l'objectif final étant de réaliser ce type de mesure au passage, on peut raisonnablement supposer que les différents contacts seront "vus" pour plusieurs positions de l'antenne. La figure 9 représente le critère  $\tilde{\Lambda}$  pour  $f = 550$  Hz,  $z_{c1} = 3$  m et  $z_{c2} = 5$  m. L'antenne utilisée est la même que dans la section 4.4.1.

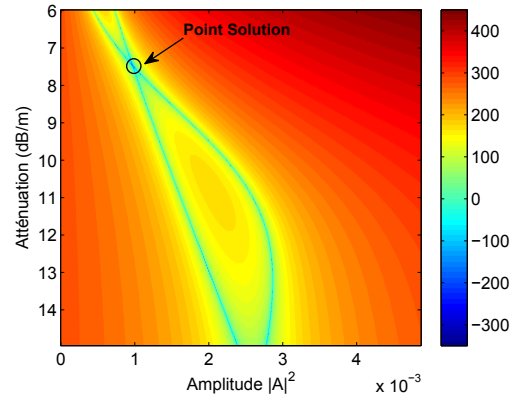


FIGURE 9 – Visualisation du Critère  $\tilde{\Lambda}$  ( $f = 550$  Hz,  $z_{c1} = 3$  m,  $z_{c2} = 5$  m)

Le critère  $\tilde{\Lambda}$  tel qu'il est défini présente un minimum plus marqué que lorsqu'il est défini en n'utilisant qu'une seule position pour l'antenne. Le point solution se situe à la croisée des vallées minimum de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ . Les premiers tests effectués avec un algorithme d'optimisation basés sur une méthode SQP montrent que la convergence vers la solution est systématique; le problème ainsi posé est mieux conditionné. De nombreux paramètres d'entrée peuvent et doivent être ajustés afin d'améliorer les performances de l'algorithme; le choix des conditions initiales est notamment déterminant. L'objectif de notre étude ne portant pas sur cet aspect, nous nous arrêtons à ces résultats préliminaires obtenus pour une utilisation naïve de l'algorithme. Nous avons néanmoins pu vérifier qu'avec le critère (11), la convergence est assurée sur l'ensemble de la gamme de fréquence, même lorsque l'on initialise loin de la solution, ou proche d'une vallée minimum.

## 4.5 N contacts d'amplitude inconnue

On considère à présent  $N$  contacts, associés à  $N$  roues sur le rail. Les contacts sont supposés décorrélés et d'amplitudes inconnues. Par extension de la section 4.1, chaque contact d'indice  $u$  à l'abscisse  $z_u$  ( $u \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ) engendre un champ acoustique qui s'écrit sous forme d'un champ élémentaire  $p_u(r, z)$  multiplié par une amplitude complexe  $A_u$ . Le champ acoustique total rayonné par le rail excité par l'ensemble de ces  $N$  contacts s'écrit :

$$p(r, z) = \sum_{u=1}^N A_u \cdot p_u(r, z) = \sum_{u=1}^N A_u \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega^2 G_\omega(z_u, z_s) \frac{e^{-ikr_s(z, z_s)}}{4\pi r_s(z, z_s)} dz_s \quad (12)$$

Sous l'hypothèse de décorrélation des  $N$  excitations, la matrice spectrale modélisée sur les  $N_{mic}$  capteurs s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}^{mod} = \sum_{u=1}^N \sigma_u^2 \mathbf{\Gamma}_u \quad (13)$$

avec :

$\sigma_u^2$  la variance de l'amplitude du contact  $u$ ,

$\mathbf{\Gamma}_u$  la matrice spectrale sur les  $N_{mic}$  capteurs relative au contact  $u$ .

Des équations (13) et (4) on déduit le critère  $\Lambda$  pour  $N$  contacts :

$$\Lambda = \sum_{n,m} |\mathbf{\Gamma}_{n,m}|^2 - 2 \sum_u \alpha_u U_u + \sum_{u,v} \alpha_u \alpha_v \mathbf{V}_{u,v} \quad (14)$$

avec :

$U_u = \sum_{m,n} (P_u)_m^* \mathbf{\Gamma}_{m,n} (P_u)_n$ ,

$P_u$  le vecteur de la pression unitaire modélisée sur l'antenne, relatif au contact  $u$ ,

$$\mathbf{V}_{u,v} = \left| \sum_m (P_u)_m (P_v)_m^* \right|^2,$$

$\alpha_u = \sigma_u^2$

Ainsi, d'après l'équation (14), trouver les  $\alpha_u$  qui minimisent  $\Lambda$  revient à résoudre :

$$\forall u \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_u} = 0 \quad (15)$$

D'après les équations (14) et (15) minimiser le critère  $\Lambda$  pour  $N$  contacts revient à résoudre le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,1} & \cdots & \mathbf{V}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{V}_{N,1} & \cdots & \mathbf{V}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (16)$$

La solution d'un tel système est unique si et seulement si la matrice  $\mathbf{V}$  est inversible. Dans ce cas, si les  $\alpha_u$  trouvés sont positifs, ils sont également solution du problème d'optimisation. Dans les autres cas, lorsque la matrice  $\mathbf{V}$  n'est pas inversible ou que les  $\alpha_u$  trouvés ne sont pas tous positifs, il faudra utiliser un algorithme d'optimisation pour minimiser le critère (14) sous contrainte de positivité des  $\alpha_u$ . En l'absence de bruit, les résultats obtenus par inversion de la matrice  $\mathbf{V}$  sont bien les solutions du problème d'optimisation, sur l'ensemble de la gamme de fréquence étudiée (jusqu'à 3000 Hz).

## 5 Conclusion

Le caractère étendu du rail en fait une source acoustique difficile à caractériser avec les méthodes de traitement d'antenne classiques ; le champ acoustique qu'il rayonne présente en effet des propriétés trop hétérogènes avec la fréquence. Dans cet article, une méthode d'optimisation paramétrique basée sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique est proposée ; il s'agit de l'erreur commise entre la matrice spectrale mesurée sur l'antenne et une matrice spectrale calculée à partir d'une modélisation vibro-acoustique du rail. Des simulations ont permis de vérifier la robustesse de cette méthode aux erreurs de modélisation pour un cas simple où seule l'amplitude de l'excitation est inconnue. Lorsque deux paramètres sont inconnus, l'utilisation de plusieurs positions pour l'antenne rend le problème d'optimisation mieux conditionné. Enfin, pour  $N$  contacts d'amplitude inconnue, les premiers résultats sont encourageants. Actuellement, des cas plus complexes sont étudiés : superposition de plusieurs ondes avec des paramètres inconnus supplémentaires (nombres d'onde).

## Références

- [1] Mellet C., Létourneaux F., *et al.*, "High speed train noise emission : Latest investigation of the aerodynamic/rolling noise contribution", *Journal of Sound and Vibration* 293(3-5), 535-546 (2006).
- [2] Thompson D.J., Jones C.J.C., "A review of the modelling of wheel/rail noise generation", *Journal of Sound and Vibration* 231(3), 519-536 (2000).
- [3] Thompson D.J., Hemsworth B., Vincent N., "Experimental validation of the TWINS prediction program for rolling noise, Part 1 : description of the model and method", *Journal of Sound and Vibration* 193, 123-135 (1996).
- [4] Pallas M.-A., Lelong J., *et al.*, "Tram noise emission : spectral analysis of the noise source contributions", *EuroNoise 08*, 2863-8 (2008).
- [5] Kitagawa T., Thompson D.J., "Comparison of wheel/rail noise radiation on Japanese railways using the TWINS model and microphone array measurements", *Journal of Sound and Vibration* 293, 496-509 (2006).
- [6] Knothe K., Grassie S.L., "Modeling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies", *Vehicle System Dynamics* 22, 209-262 (1993).
- [7] Hamet J.-F., "Railway noise : use of the Timoshenko model in rail vibration studies", *acta acustica* 85, 54-62 (1999).
- [8] Thompson D.J., Jones C.J.C., "Investigation into the validity of two-dimensional models for sound radiation from waves in rails", *J. Acoust. Soc. Am.* 113 (4), 1965-1974 (2003).
- [9] Biggs M.C., "Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming" *Towards Global Optimization* (L.C.W. Dixon and G.P. Szergo, eds.), 341-349 (1975).