

Réponse dynamique de l'aorte soumise à une pression pulsatoire. Résolutions analytiques et numériques d'un modèle 3D vibro-acoustique

Adil El Baroudi, Fulgence Razamahery, Nicolas Bideau, Lalaonirina R. Rakotomanana

¹ RMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, nicolas.bideau@univ-rennes1.fr

Ce travail a pour but l'étude du comportement dynamique d'un modèle d'interaction fluide-structure issu de la biomécanique cardiovasculaire. On s'intéresse en particulier à la modélisation tridimensionnelle de l'aorte dans laquelle le mouvement du fluide est décrit par un modèle acoustique. Le travail est composé de deux parties. La première partie s'intéresse à l'analyse modale du système couplé sang-artère, où l'influence de la prise en compte des différentes couches seront abordées. On étudie la sensibilité vibro-acoustique vis-à-vis de l'épaisseur, de la couche fluide. Des solutions analytiques seront mises en évidence et comparées aux solutions numériques obtenues par la méthode des éléments finis, dans le but de valider l'algorithme de calcul. La deuxième partie aborde le problème dynamique, où l'on utilise une technique de projection modale en s'appuyant sur les résultats obtenus dans la première partie. La propagation de l'onde de pression le long de l'aorte sera analysée suivant le type de condition aux limites, ainsi que la présence éventuelle de la crosse aortique et d'une sténose.

1 Introduction

Ce travail est une suite d'une étude proposé en [?], qui consiste à analyser les réponses dynamique d'une section droite de l'aorte en présence ou non d'une sténose.

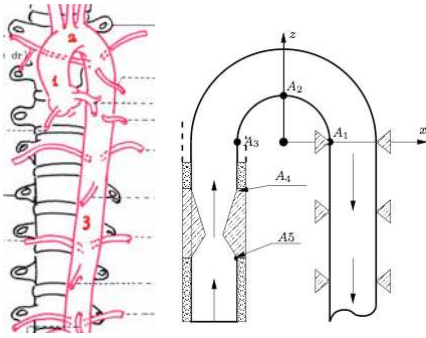


FIGURE 1 – Aorte et points de calcul pour une artère sténosée

La modélisation tridimensionnelle du problème permet de mettre en évidence certain couplage dynamique tel que la flexion-torsion notamment. Pour modéliser la paroi artérielle, on se place dans l'hypothèse des petites perturbations. Chaque couche est supposée isotrope et homogène. Les caractéristiques utilisées sont celles proposées en [?]. Afin de mettre en évidence les phénomènes de propagation des différentes ondes présentes dans le système couplé, il est plus judicieux d'adopter le modèle acoustique tant en analyse modale qu'en dynamique directe.

2 Le problème modèle

Le problème acoustique est formulé en variable pression p . On note Γ_e la section d'entrée de l'aorte ascendante, Γ_s et Γ_L sont respectivement les sections de sortie et la surface latérale de l'aorte descendante. Les domaines occupés par le fluide, la paroi saine et sténosée sont notés respectivement Ω_f , Ω_1 et Ω_2 . Le problèmes aux limites associés s'écrit : trouver $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, p)$ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} &= \mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}_i) + \rho \mathbf{F}(t) \quad (\Omega_i) \\ \sigma(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} &= \sigma(\mathbf{u}_2) \mathbf{n} \quad (\Gamma_1) \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 \quad (\Gamma_1) \\ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \mathbf{div} \left[\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - \mathbf{q}) \right] \quad (\Omega_f) \\ \sigma(\mathbf{u}_i) \mathbf{n} &= -p \mathbf{n} \quad (\Gamma) \\ [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \quad (\Gamma) \\ \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad (\Gamma_L) \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0} \quad (\Gamma_s) \\ p &= P_{in}(t) \quad (\Gamma_e) \\ [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \quad (\Gamma_e) \end{array} \right. \quad (1)$$

avec $i = 1, 2$ et où l'accélération $\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}$ est donnée. En sortie, on utilise une condition de radiation de type onde plane, ce qui est licite car on est assez loin de la source

2.1 Le problème modal

Dans un travail récent, nous avons réalisé plusieurs étude à caractère modal de la branche ascendante de l'artère où différents modèles monocouche, bicouche et tricouche ont été testés. Des solutions analytiques ont

été obtenues et comparées aux solutions numériques afin de valider le logiciel de calcul que nous avons utilisé. Les caractéristiques matérielles utilisées étaient celle de [?]. On résoud analytiquement et numériquement le problème modal associé à (??) avec les caractéristiques matérielles et géométriques suivantes

	$E(Pa)$	ν	ρ	$R(m)$	c_0
Lumen			1000	0,0105	1450
Couche	$1052,65 \cdot 10^3$	0,45	1150	0,0125	
Sténose	$4210,6 \cdot 10^3$	0,45	1150		

Dans le cas de l'aorte complète de la figure ??, on obtient les 6 premières fréquences suivantes :

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Saine	1.37	1.68	3.81	4.83	12.63	15.56	16.80
Stén.	1.37	1.68	3.83	4.86	12.17	13.31	17.30

Voici quelques formes modales dans le cas sténosé.

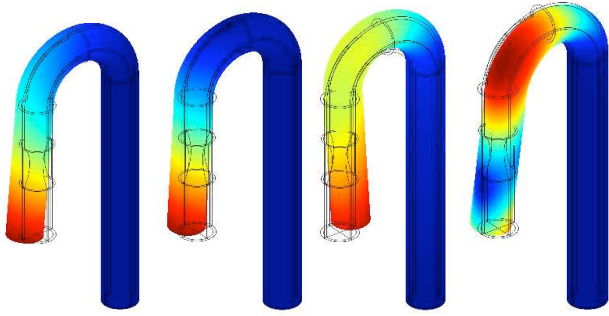


FIGURE 2 – Les 4 premières formes modales dans le cas sténosé

Ce sont des modes hors plan (Oxy) de la branche ascendante. Ceci est dû essentiellement à la condition aux limites imposée sur la branche descendante.

3 Résolution du problème dynamique

Afin de mettre en évidence, la technique de résolution par projection modale, il est préférable de l'appliquer à l'artère monocouche. En prenant les fonctions tests classique $\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_1), \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} (\Gamma_L), \mathbf{u} = \mathbf{0} (\Gamma_s)\}$ et pour une condition aux limites en pression $Q = \{\phi \in H^1(\Omega_1), \phi = 0 (\Gamma_e)\}$, la formulation variationnelle du problème aux limites (??) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx \\ - \int_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v} dx \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} \frac{p\phi}{c_0^2} dx + \int_{\Gamma} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi d\Gamma \right) \\ + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \phi dx \end{array} \right. \quad (2)$$

pour tout $(\mathbf{v}, \phi) \in \mathbf{V} \times Q$. La résolution numérique du problème est effectuée à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. En utilisant les éléments de Lagrange, où

$\mathbf{u}_h \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ et $p_h \in \mathbb{P}_1$, la discrétisation du problème variationnel conduit au système

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & \mathbb{O} \\ \mathbb{M}_a & \mathbb{M}^f \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbb{B} \\ \mathbb{O} & \mathbb{K}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (3)$$

La projection modale consiste à décomposer le champ des déplacements $\mathbf{u}$ et le champ de pression p sur la base modale couplée [?], notée $(\mathbf{X}_k(x), p_k(x))_{k=1, \dots, N}$ du système couplé

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=1}^N q_k(t) \mathbf{X}_k(x) ; p(x, t) = \sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \quad (4)$$

où $(\mathbf{X}_k(x), p_k(x))$ sont solutions du problème modal associé à (??). On injecte la décomposition modale (??) dans le problème variationnel (??). En introduisant les vecteurs $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))^T$ et $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))^T$, le problème de Cauchy associé au système couplé s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K} \mathbf{q}(t) + \frac{1}{\rho_0} \mathbb{M}^a \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \mathbb{M}^f \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbb{M}^a \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K}^f \mathbf{r}(t) = \mathbf{G}(t) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{r}(0) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (5)$$

Les conditions aux limites à l'entrée ont les allures suivantes.

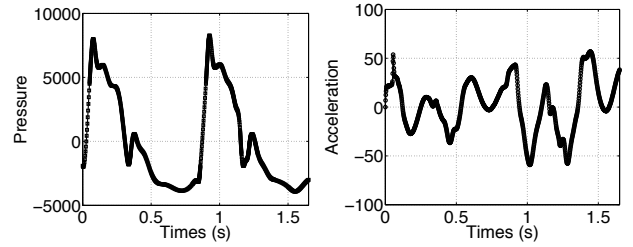


FIGURE 3 – les deux types de conditions aux limites

Divers paramètres dynamiques et acoustiques ont été calculés aux différents points A_i introduits précédemment. Ces paramètres peuvent être classés en deux catégories :

1. **les paramètres globaux** : qui sont les efforts pariétaux s'exerçant sur la paroi intérieur de l'aorte en contact avec le fluide. En posant $\mathbf{T} = \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}$, on définit les éléments de réduction au point O du torseur des efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \mathbf{T} d\Gamma = [X(t), Y(t), Z(t)]^T \\ \int_{\Gamma} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T} d\Gamma = [L(t), M(t), N(t)]^T \end{array} \right. \quad (6)$$

2. **les paramètres locaux** : qui sont calculés aux point A_i ; ce sont la contrainte de Von Mises $\sigma_{eq}(t)$, les composantes du champ de déplacement $\mathbf{u}$, la pression fluctuante p et l'intensité acoustique L_p (en décibels) défini par

$$L_p(x, t) = 20 \log \left(\frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right) \quad (dB) \quad (7)$$

où p_{eff} est la pression efficace et p_{ref} la pression de référence.

3.1 Résultats numériques dans le cas d'une artère saine

Les deux conditions aux limites ont été testés. On regarde les variations des différents paramètres introduit précédemment.

3.1.1 Conditions aux limites en pression

En imposant une pression à l'entrée, on obtient les résultats suivants

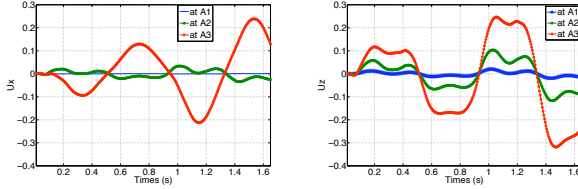


FIGURE 4 – Composantes u et w de $\mathbf{u}$ aux points A_i .

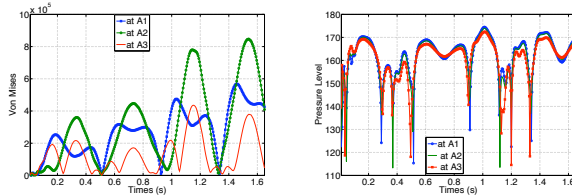


FIGURE 5 – Von Mises et niveau sonore aux points A_i

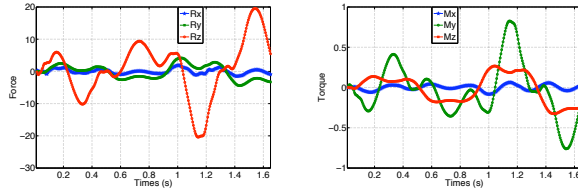


FIGURE 6 – Le torseur des efforts globaux en O

On constate que c'est sur la section terminale de la crosse aortique que les variations du champ de déplacement sont les plus importantes. Par contre, c'est au sommet de la crosse aortique que la contrainte équivalente est importante et il y a une certaine synchronisation au niveau des valeurs aux points A_1 , A_2 et A_3 . Pour l'intensité acoustique, les niveaux aux différents points sont en phase, et la plage maximale semble se situer pendant la phase systolique. Ce qui est en accord avec la réalité. En ce qui concerne les efforts globaux, les composantes suivant z de la résultante et du moment sont les plus importantes. C'est cette composante du moment suivant z qui entraîne une rotation de la branche ascendante autour de l'axe z , à cause des conditions aux limites imposées sur la branche descendante.

3.1.2 Conditions aux limites en accélération

On impose maintenant à l'entrée une condition de paroi vibrante, c'est-à-dire une accélération. On obtient alors les résultats suivants

Pour composantes du champ de déplacement, on a les mêmes constatations que précédemment. Par contre

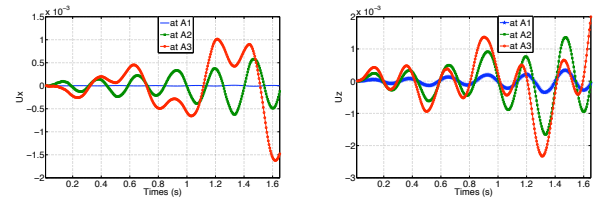


FIGURE 7 – Composantes u et w de $\mathbf{u}$ aux points A_i .

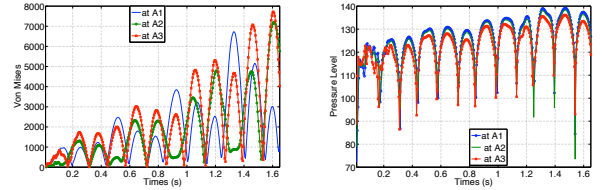


FIGURE 8 – Von Mises et niveau sonore aux points A_i

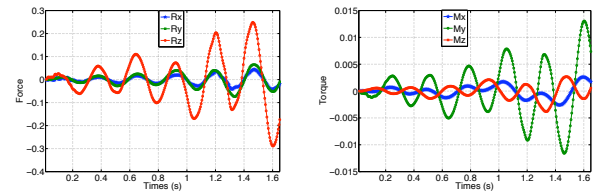


FIGURE 9 – Le torseur des efforts globaux en O

au niveau de la contrainte de Von Mises, ce sont les deux points situés sur le sommet et la section terminale de la crosse qui sont les plus sollicités. L'allure du niveau sonore est très différente que celle obtenue précédemment. Pour les efforts globaux, la composante suivant z est toujours la plus importante pour la résultante, tandis que pour le moment, c'est la composante suivant y qui l'emporte, ce qui peut entraîner, un mouvement de balancement de la branche ascendante dans le plan (Oxy) .

3.2 Résultats numériques dans le cas d'une artère sténosée

Dans le modèle, on suppose l'existence d'une sténose au niveau de la branche ascendante. La modélisation d'une sténose est toujours délicate. En effet, elle doit prendre racine sur l'intima et la media. Afin, de l'intégrer dans notre modèle monocouche, on l'a inséré jusqu'au milieu de la paroi.

3.2.1 Conditions aux limites en pression

On obtient les résultats suivants

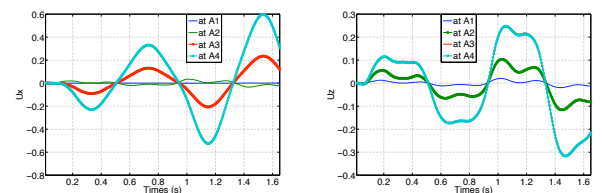


FIGURE 10 – Composantes u et w de $\mathbf{u}$ aux points A_i .

On constate que le point A_4 situé sur la sténose qui subit le plus de sollicitation tant au niveau du champ de

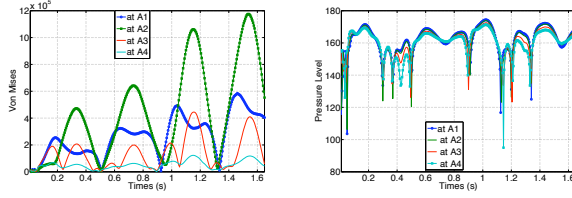


FIGURE 11 – Von Mises et niveau sonore aux points A_i

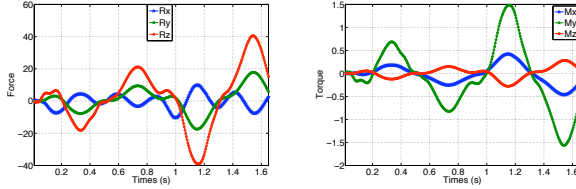


FIGURE 12 – Torseur des efforts globaux en O

déplacement que de Von Mises. L'allure de l'intensité sonore est analogue à celle obtenue dans le cas sain, de même pour les efforts globaux.

3.2.2 Conditions aux limites en accélération

On obtient les résultats suivants pour les paramètres locaux

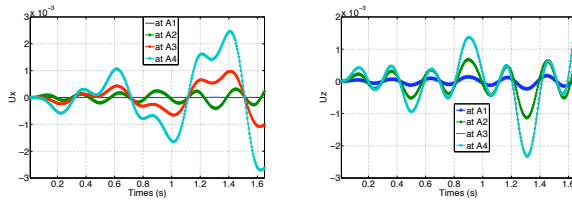


FIGURE 13 – Composantes u et w de $\mathbf{u}$ aux points A_i .

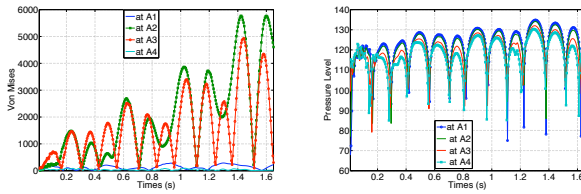


FIGURE 14 – Von Mises et niveau sonore aux points A_i

En ce qui concerne les efforts globaux, on obtient les résultats suivants :

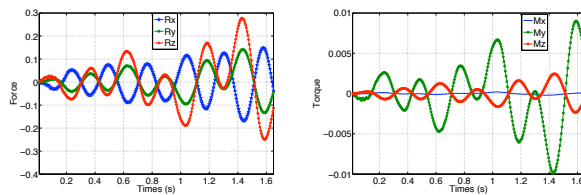


FIGURE 15 – Torseur des efforts globaux en O

On constate toujours que le point A_4 situé sur la sténose qui subit le plus de sollicitation tant au niveau du champ de déplacement que de Von Mises. L'allure

de l'intensité sonore est analogue à celle obtenue dans le cas sain, de même pour les efforts globaux.

4 Visualisation des déformées et des champs de pression

Regardons maintenant les différentes déformées de la paroi pour les types de conditions aux limites, ainsi que les champs de pression.

4.1 Variation de la pression

Regardons comment varie localement la pression le long de l'aorte, c'est-à-dire à l'entrée, au sommet de la crosse (point A_2) et à la sortie.

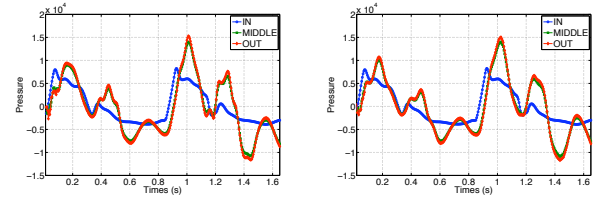


FIGURE 16 – Variations locale de la pression pour une artère saine et sténosée

4.2 Déformées de la paroi aortique

Regardons les déformées successives de la paroi aortique aux différents instants $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.8$.

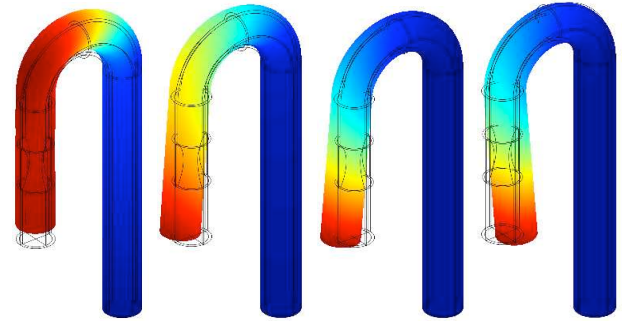


FIGURE 17 – Condition en pression. Déformées à $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.8$ (s) pour une conditions

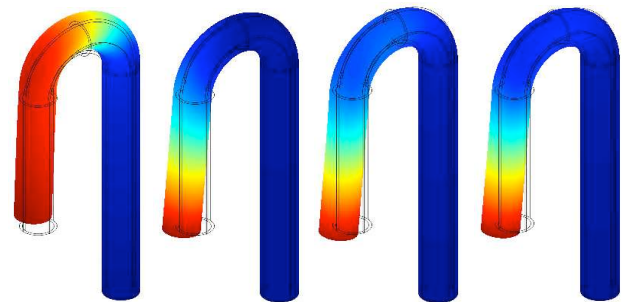


FIGURE 18 – Condition en accélération. Déformées à $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.8$ (s)

Dans les deux cas et pendant la phase systolique, les deux comportements dynamiques sont à peu près

analogues. Par contre, en fin de la phase diastolique, les comportements divergent. Pour analyser ceux-ci, il suffit de se rapporter sur la réponse globale décrite précédemment.

5 Conclusions

Les résultats ci-dessus montrent quelques phénomènes intéressants :

1. Au niveau de l'analyse modale, la présence d'une sténose ne modifie pas tellement les fréquences propres. Ce phénomène qui n'existe pas dans le modèle 2D [?] est dû essentiellement à la géométrie du modèle, qui présente une certaine anisotropie géométrique. En effet, en isolant uniquement la branche ascendante [?], on peut montrer qu'il existe des écarts notables entre une artère et une artère sténosée.
2. La sensibilité des résultats au type de conditions aux limites sur la paroi externe est très grande. Ce qui conduit à remettre surtout en cause la condition aux limites en accélération. En effet, si le champ de pression est accessible aux techniques de mesure directe disponibles à l'heure actuelle, par contre l'obtention du champ d'accélération s'effectue de façon indirecte, à partir par exemple du champ des vitesses [?].
3. Au niveau de l'intensité acoustique, on peut remarquer que la présence d'une sténose modifie notablement sa valeur. Il est alors intéressant à l'avenir de faire une étude à caractère paramétrique de ce phénomène.
4. Les résultats sur les efforts globaux montrent que le théorème d'Euler de mécanique des fluides reste vérifier en interaction fluide-structure.
5. Enfin, comme le montre les résultats sur les champs de pression, le choix de la condition aux limites n'est pas trivial. Car le fait d'avoir choisi dans notre cas une condition de type Sommerfeld, il reste une certaine accumulation des ondes acoustiques à partir de la crosse aortique. Mais ce phénomène peut aussi s'expliquer par une série de réflexions des ondes dans la crosse elle-même.

Références

- [1] F. Gao, Z. Guo, M. Sakamoto, T. Matsuzawa, "Fluid-structure Interaction a Layered Aortic Arch", *J. Biol. Phys.*, 32, 435-454, 2006.
- [2] P. Ou, F. Balleux, O. Jolivet, A. Herment, D. Sidi, D. Bonnet, E. Mousseaux, "Aortic arch shape and flow dynamics", *Arch. Mal. Cœur Vaiss.*, 98 (7-8), 957-968, 2005.
- [3] G. A. Holzapfel, "Structural and numerical models for the (visco)elastic response of arterial walls with residual stresses. Biomechanics of soft tissue in Cardiovascular system". *Springer*, New York, pp 109-184, 2006.
- [4] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, "Computational stress-deformation analysis of arterial walls including high-pressure response", *Int. J. Cardiol.*, 116 (1), pp 78-85, 2007.
- [5] X. M. Zhang, G. R. Liu and K. Y. Lam, "Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach", *Journal of Sound and Vibration*, 239 (3), pp 397-403, 2001.
- [6] X. M. Zhang, "Parametric studies of coupled vibration of cylindrical pipes conveying fluid with the wave propagation approach", *Computers and Structures*, 80, pp 287-295, 2002.
- [7] X. M. Zhang, J. F. Greenleaf, "An anisotropic model for frequency analysis of arterial walls with the wave propagation approach", *Applied Acoustics*, 68, pp 953-969, 2007.
- [8] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana, "Parametric Modal Analysis of Brain-Csf-Skull system. Influence of fluid-Structure Interaction", *European Journal of Computational Mechanics*, vol 18/1, 2009.
- [9] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana, "Potential formulation in fluid-structure interaction : Application to the modal analysis of skull-CSF-brain system", *Conference on Computational Mechanics*, AfriComp, Ed. Malan et al., p.86, 2009.
- [10] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. R. Rakotomanana, "Analyse dynamique par projection modale d'un modèle 2D d'interaction fluide-structure. Application au système couplé Crâne-Lcr-Cerveau", *9ème Colloque National en Calcul des Structures*, 25-29 Mai 2009, Giens (Var).
- [11] A. El Baroudi, F. Razafimahery, N. Bideau, L. R. Rakotomanana, "Influence of the fluid-structure interaction in biomechanics : Application to coupled modal analysis and dynamics of the aorta under a impacting shock", *9th International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Valencia, Spain 24-27 February 2010.
- [12] A. El Baroudi, F. Razafimahery, N. Bideau, L. R. Rakotomanana, "Influence of the fluid-structure interaction in biomechanics : Application to parametric modal analysis and dynamics of the aorta under a shock", *To appear in International Journal of Biomedical Engineering and Technology (IJBET)*.
- [13] N. Bideau, B. Mahiou, L. Monier, F. Razafimahery, L. R. Rakotomanana, B. Bideau, G. Nicolas, "2D dynamical efficiency of a swimfin : a fluid-structure interaction approach", *XXXIVème Congrès SB 2009 and Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 31 août, 1-2 sept. 2009, Toulon.
- [14] R. J. Gibert, "Vibration des structures. Interaction avec des fluides. Sources d'excitation aléatoires", *Editions Eyrolles*, 1988.
- [15] H. J. -P. Morand and R. Ohayon, "Fluid Structure Interaction", *John Wiley & Sons*, 1995.