

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Le 'Compressed sensing' pour l'holographie acoustique de champ proche I : Aspects algorithmiques et simulations

Gilles Chardon<sup>1</sup>, Antoine Peillot<sup>2</sup>, Laurent Daudet<sup>1</sup>, François Ollivier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Langevin, ESPCI ParisTech, UPMC Univ Paris 06, Université Paris Diderot - Paris 7, CNRS UMR 7587

10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France

gilles.chardon@espci.fr, laurent.daudet@espci.fr

<sup>2</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7190

2 place de la Gare de Ceinture, 78210 Saint Cyr l'École, France

antoine.peillot@upmc.fr, francois.ollivier@upmc.fr

Le "Compressed Sensing (CS)" propose une nouvelle façon de mesurer des champs complexes en utilisant des connaissances sur la physique des champs étudiés dès la phase d'échantillonnage, c'est-à-dire directement au niveau du capteur. On suppose que le champ à acquérir possède une représentation parcimonieuse, c'est-à-dire pouvant être décrit dans une base (connue) par un faible nombre de coefficients (inconnus) ; on acquiert alors des échantillons dans des directions faiblement corrélées à l'espace de représentation des signaux, par exemple à l'aide de projections aléatoires. Sous ces hypothèses, on peut en théorie réduire considérablement le nombre de données à acquérir, pour une précision de reconstruction des champs sensiblement équivalente. Le projet ECHANGE (ECHANtillonnage Acoustique Nouvelle GENération) financé par l'ANR a pour objectif de développer un cadre théorique, algorithmique et expérimental, fondé sur les principes du CS pour la mesure de champs acoustiques complexes au moyen d'un nombre limité de transducteurs. Comme domaine initial, nous avons choisi d'adapter les principes du CS à l'holographie acoustique de champ proche (NAH). L'objectif de cette méthode inverse est de reconstruire le champ vibratoire d'une structure à partir de la mesure de son champ acoustique proche.

Cet exposé présente les étapes de modélisation et de simulations préalables à une application expérimentale : détermination de la parcimonie des signaux à mesurer, modélisation des mesures, choix d'un algorithme, et finalement simulations aboutissant au choix d'une forme d'antenne particulière adaptée à l'application du compressed sensing, réduisant au maximum le nombre de mesures nécessaires pour conserver de bonnes performances.

## 1 Introduction

L'holographie acoustique en champ proche [1] est une méthode de reconstruction de sources à partir de mesures de pression à courte distance, sur un plan appelé plan hologramme, parallèle au plan source, à l'aide d'une antenne de microphones. Le champ mesuré sur le plan hologramme est ensuite retropropagé numériquement pour reconstruire la distribution des sources sur le plan source. La figure 1 présente un montage expérimental classique d'holographie en champ proche.

Cette technique, bien que très utilisée, présente deux difficultés pratiques

- la nécessité d'une procédure de régularisation : la propagation agissant comme un filtre passe-bas spatial, la rétropropagation est un problème inverse nécessitant l'utilisation de techniques de régularisation [2]. La régularisation de Tikhonov, souvent utilisée, correspond à rechercher la solution  $\hat{\mathbf{W}}$  du programme de minimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{W}} = \min_{\mathbf{W}} \|\mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{W}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{W}\|_2^2 \quad (1)$$

où  $\mathbf{W}$  est la distribution des vitesses recherchée,

$\mathbf{G}$  le propagateur,  $\mathbf{P}$  les pressions mesurées sur le plan hologramme, et  $\alpha$  le paramètre de la régularisation, à déterminer. Au prix d'une approximation sur les conditions limite, ce problème peut être reformulé dans le domaine de Fourier spatial, où le propagateur  $\mathbf{G}$ , de par sa nature convolutive, devient diagonal. Dans ce cas, la régularisation consiste simplement à appliquer un filtre passe-bas spatial, dont la fréquence de coupure dépend du paramètre  $\alpha$ , aux pressions mesurées avant la rétropropagation. Ce type de régularisation, linéaire et peu cher en calculs, permet d'obtenir des reconstructions acceptables, mais ne tire pas parti d'informations a priori disponibles sur les profils de vitesses recherchés.

- le nombre de mesures à faire est important, ce qui, dans le cas du dispositif de la figure 1, nécessite de répéter 16 fois les mesures de 120 microphones chacune, pour des positions différentes de l'antenne. Ce nombre important de mesures nécessaire est conséquence du théorème d'échantillonnage de Shannon-Whittaker, qui nous indique qu'il est nécessaire d'échantillonner spatialement à une période deux fois plus petite que la plus petite



FIG. 1: Dispositif d'holographie en champ proche classique

période du signal à mesurer, ceci quel que soit le contenu spectral effectif de celui-ci.

Nous proposons dans cet article l'utilisation d'information a priori sous la forme de parcimonie, hypothèse fondamentale d'un nouveau paradigme d'acquisition des signaux appelé compressed sensing [3], pour à la fois améliorer les résultats et diminuer le nombre de mesures utilisées. On dit qu'un signal est *s-parcimonieux* s'il peut raisonnablement s'approximer par une combinaison linéaire de  $s$  vecteurs de base tirés d'un ensemble (appelé dictionnaire) fixé a priori. Le nombre de mesures nécessaires pour acquérir un tel signal dépend alors non plus de la bande passante du signal, mais de la quantité d'information (au sens de la parcimonie) qu'il contient. Bien sûr, ces avancées ne s'obtiennent pas gratuitement, et le prix à payer est ici une complexité algorithmique plus importante mais toutefois raisonnable pour le processus de reconstruction des signaux à partir du faible nombre de mesures "compressées".

Le plan de cet article est le suivant : tout d'abord, la section 2 présente la parcimonie des cartes de vitesses, qui justifie l'emploi de cette nouvelle méthode d'échantillonnage. La section 3 introduit la modélisation des mesures et les formes d'antennes adaptées à la méthode. La section 4 présente quelques algorithmes classiques pour la reconstruction des champs vibratoires à partir des mesures "compressées". Des résultats de simulations sont donnés en section 5, et la section 6 présente des conclusions préliminaires et des perspectives de cette étude.

Il est à noter qu'une deuxième partie de cette étude, présentant des détails expérimentaux ainsi que les premiers résultats obtenus, est présentée dans une autre session de cette conférence [4].

## 2 Parcimonie des cartes de vitesses

Les cartes de vitesses recherchées sont, dans cette étude, les déformées opérationnelles d'une plaque mince homogène. Ces déformées opérationnelles, vecteurs propres de l'opérateur bi-laplacien, ont des propriétés particulières dont nous allons tirer partie pour en constru-

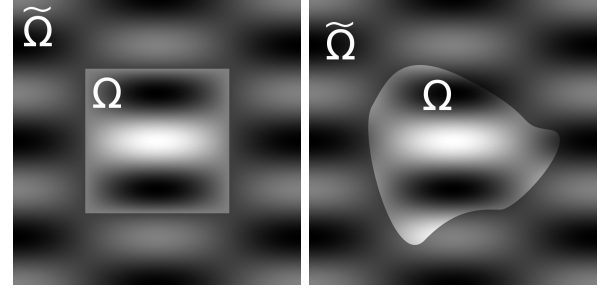


FIG. 2: Construction du dictionnaire, pour une plaque rectangulaire et une plaque quelconque.

ire des représentations compactes. Ces représentations compactes, *parcimonieuses* selon le terme traditionnel, décomposeront les déformées opérationnelles comme combinaisons linéaires mettant en jeu peu de vecteurs (par rapport à la dimension des signaux) parmi une famille de vecteurs donnée a priori, qu'on appellera dictionnaire.

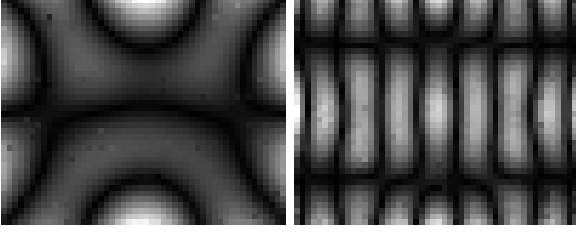
Connaissant les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque, il est évidemment possible d'utiliser la base des modes propres pour décomposer ceux-ci. Les modes propres auront dans ce cas une représentation 1-parcimonieuse, situation la plus favorable en pratique, mais peu pertinente vu la nécessité de calculer un dictionnaire pour chaque plaque à analyser, ce qui demande une connaissance assez précise de la plaque et des conditions aux bords, et une analyse modale numérique.

Cependant, dans le cas particulier d'une plaque rectangulaire en appui simple de dimensions  $L_x \times L_y$ , ces modes propres ont pour expression

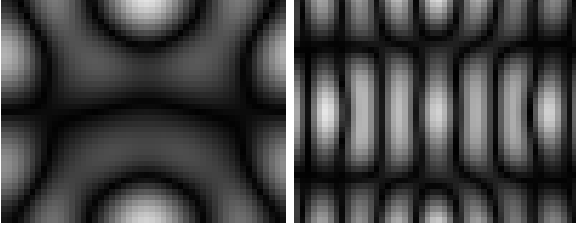
$$u_{mn} = \sin(m\pi x/L_x) \sin(n\pi y/L_y)$$

pour  $m$  et  $n$  entiers. On remarque qu'en restreignant les vecteurs de la base de Fourier réelle du domaine rectangulaire de dimensions doubles  $2L_x \times 2L_y$ , on obtient une famille génératrice (et redondante) des fonctions à valeurs sur le domaine de la plaque, et que les modes propres  $u_{mn}$  y sont 1-parcimonieux. En s'inspirant de ce cas particulier, une façon de construire un dictionnaire pour représenter parcimonieusement les modes propres d'une plaque de géométrie connue serait de restreindre les vecteurs de la base de Fourier d'un domaine rectangulaire de dimension double de la plaque ( $\tilde{\Omega}$  sur la figure 2) au domaine de celle-ci ( $\Omega$ ). Ce dictionnaire reste dépendant de la géométrie de la plaque analysée mais devient indépendant des propriétés mécaniques de celle-ci et des conditions aux limites qui lui sont appliquées, et, de plus, sa construction nécessite peu de calculs.

La figure 3 montre des exemples de représentations parcimonieuses de deux modes propres d'une plaque rectangulaire aux bords libres obtenues par Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [5]. On remarque que ces approximations sont très fidèles aux cartes de vitesse d'origine.



Amplitudes des modes obtenues par vibrométrie laser



Amplitudes des approximations 8-parcimonieuses

FIG. 3: Modes propres d'une plaque rectangulaire (40 cm par 50 cm, bords libres), pour 402 Hz et 1807Hz

### 3 Mesures et géométries d'antennes

Une fois la parcimonie des signaux à reconstruire déterminée, l'étape suivante est la modélisation des mesures et la construction de stratégies d'échantillonnage susceptibles de pouvoir donner de bonnes reconstructions, tout en pouvant raisonnablement se mettre en œuvre expérimentalement.

#### 3.1 Modélisation des mesures

La géométrie du dispositif permet l'utilisation des intégrales de Rayleigh pour exprimer de façon commode la pression rayonnée dans un demi-espace par la plaque plane d'altitude  $z = 0$  connaissant la vitesse normale  $\dot{w}(x, y)$  en tout point de celle-ci.

La pression en un point de coordonnées  $(x, y, z)$  s'écrit donc

$$p(x, y, z) = \iint g_v(x - x', y - y', z) \dot{w}(x', y') dx' dy'$$

Où  $g_v$ , le propagateur, s'écrit

$$g_v(\vec{r}) = i\rho c k \frac{e^{ik||\vec{r}||}}{2\pi||\vec{r}||}$$

Les mesures sont effectuées en  $N$  points de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , où la pression prend les valeurs  $p_i$ . Ces pressions, regroupées dans un vecteur  $\mathbf{P}$ , dépendent linéairement de la distribution des vitesses  $\dot{w}$  sur le plan source. Comme, en pratique, ce plan source est discrétisé sur  $M$  points, on peut réécrire cette dépendance linéaire à l'aide de matrices. La pression  $\mathbf{P}$  s'écrit alors

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{W}}$$

où les lignes de  $\mathbf{G}$  sont obtenues à partir des valeurs de  $g_v$  en différents points, et où  $\dot{\mathbf{W}}$  est le vecteur colonne des valeurs des vitesses sur le plan source.

Dans notre cas, la dimension de  $\mathbf{P}$ ,  $N$ , est largement plus petite que la dimension de  $\dot{\mathbf{W}}$ , il est donc impossible, sans information a priori, d'inverser le système.

Cette information a priori est la parcimonie des solutions mise en évidence dans la partie précédente. En effet, la distribution des vitesses  $\dot{\mathbf{W}}$  peut s'écrire

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}}$$

où  $\mathbf{D}$  contient les  $L$  vecteurs du dictionnaire  $\mathcal{D}$ , et  $\dot{\mathbf{V}}$ , vecteur parcimonieux de longueur  $L$ , les coefficients de la décomposition de  $\dot{\mathbf{W}}$ , et le système devient alors

$$\mathbf{P} = (\mathbf{GD})\dot{\mathbf{V}}$$

Le vecteur  $\dot{\mathbf{V}}$  pourra alors être reconstruit en utilisant des algorithmes adaptés, à condition que la matrice  $\mathbf{GD}$  vérifie certaines propriétés.

#### 3.2 Formes d'antennes

Toute matrice  $\mathbf{GD}$ , qu'on notera  $\Phi$ , ne permet pas la reconstruction. Une condition suffisante pour que la reconstruction soit possible est la condition d'isométrie restreinte. Une matrice  $\Phi$  vérifie la condition d'isométrie restreinte d'ordre  $s$  de constante  $\delta_s$ , si, pour tout vecteur  $s$ -parcimonieux  $x_s$ , elle vérifie

$$(1 - \delta_s)||x_s||_2^2 \leq ||\Phi x_s||_2^2 \leq (1 + \delta_s)||x_s||_2^2$$

L'ordre  $s$  et la constante  $\delta_s$  nécessaires pour la reconstruction dépendra alors de l'algorithme utilisé. Cependant, de telles constantes sont en pratique trop complexes à calculer, et ne pourront donc pas nous aider à concevoir ou choisir la meilleure antenne possible.

Dans le cas, théorique, où les signaux à reconstruire sont parcimonieux dans la base de Fourier, les mesures ayant la plus forte probabilité de réussir sont des mesures ponctuelles placées de façon aléatoire sur le domaine du signal [6]. Dans notre cas, les signaux étant parcimonieux dans un dictionnaire de type Fourier, et les mesures étant, au moins à courte distance entre source et antenne, assez concentrées autour de leur maximum, il paraît pertinent d'utiliser une antenne de microphones placés de façon aléatoire. Des contraintes pratiques relatives à la construction d'une antenne de ce type vont cependant nous amener à concevoir des antennes semi-aléatoires, qui possèdent une certaine structure rendant leur fabrication plus aisée tout en retenant des aspects aléatoires nécessaires au fonctionnement de la méthode.

Les antennes simulées sont donc (cf. figure 4) :

- une antenne *aléatoire*, aux micros placés de façon totalement aléatoire ;
- une antenne *tensorielle*, de barres identiques, réparties aléatoirement, les micros étant eux-même espacés aléatoirement sur les barres ;
- une antenne *parallèle*, aux barres parallèles, réparties aléatoirement, micros espacés aléatoirement et différemment sur chaque barre ;
- une antenne *oblique*, aux barres obliques autorisées à se croiser ;
- une antenne *oblique décroisée*, aux barres obliques en interdisant les croisements ;
- une antenne *Shannon*, régulière.

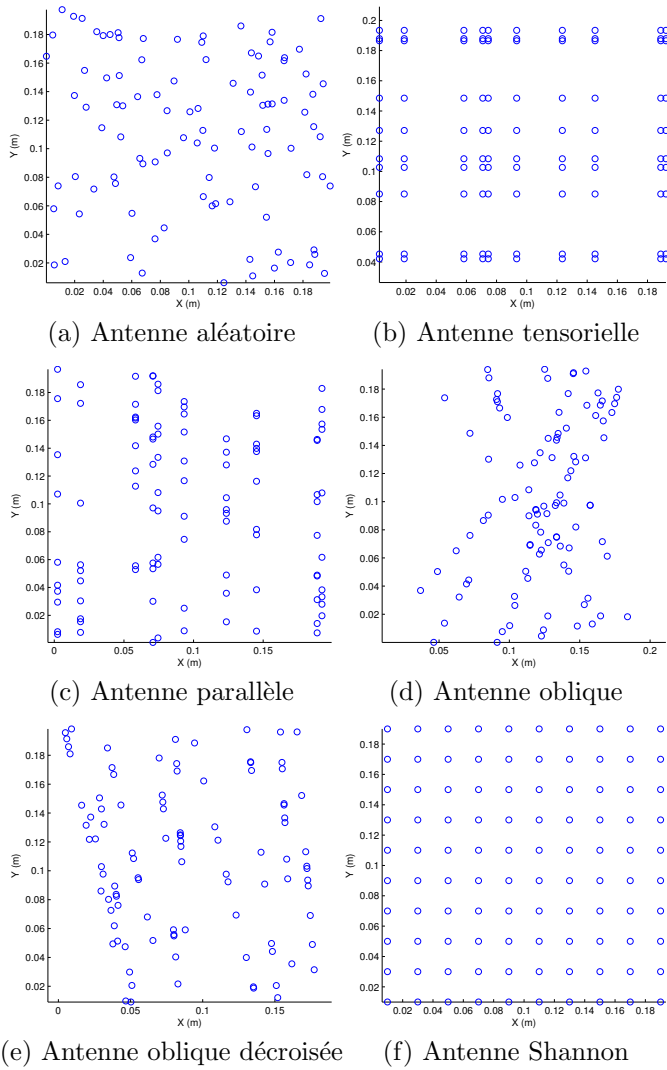


FIG. 4: Formes d'antennes simulées

Après évaluation des performances de ses antennes par des simulations numériques, on sélectionnera l'antenne présentant le meilleur compromis entre qualité des reconstructions et facilité de fabrication.

## 4 Algorithmes de reconstruction

Différents algorithmes, utilisant des approches diverses sont disponibles pour obtenir une reconstruction utilisant la parcimonie et les mesures présentées plus haut. On peut répartir la plupart en deux grandes classes :

- algorithmes d'optimisation mettant en jeu un critère de parcimonie (généralement une norme  $\ell_1$ ) ;
- algorithmes itératifs (gloutons).

Voici une présentation succincte de quelques algorithmes de ces deux classes.

### 4.1 Algorithmes de minimisation $\ell_1$

En présence de données non bruitées, *Basis Pursuit* [7] permet de reconstituer le signal parcimonieux. Pour résoudre le système  $y = Ax$  sous contrainte de parcimonie sur  $x$ , il propose de choisir la solution du problème

d'optimisation suivant :

$$\hat{x} = \min_x \|x\|_1 \text{ sous contrainte } y = Ax$$

où la norme  $\ell_1$  de  $x$ ,  $\|x\|_1$  est définie par

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

Une variante, Basis Pursuit Denoising, permet l'utilisation de mesures bruitées :

$$\hat{x} = \min_x \|x\|_1 \text{ sous contrainte } \|y - Ax\|_2 < \epsilon$$

où  $\epsilon$  est une estimation du niveau de bruit dont sont affectées les mesures.

Enfin, il existe une version pénalisée :

$$\hat{x} = \min_x \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

Cette version cherche un compromis entre fidélité aux mesures et parcimonie de la solution. La nature du compromis dépendra alors de la valeur de  $\lambda$  : un  $\lambda$  faible favorise les solutions correspondant aux mesures, alors qu'un  $\lambda$  élevé demandera une solution parcimonieuse, au risque de s'écarter des mesures.

On peut considérer cette régularisation comme une variante de la régularisation de Tikhonov de l'équation (1), où le terme de pénalisation est une norme  $\ell_1$  au lieu d'une norme  $\ell_2$ . Ces différents problèmes d'optimisation, étant convexes et de forme particulière, admettent des méthodes de résolution rapides.

## 4.2 Algorithmes itératifs

D'autres algorithmes utilisent une approche itérative pour trouver une solution au problème. Deux exemples classiques sont Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [5] et Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP) [8]. Le premier, OMP, déjà utilisé pour obtenir des représentations parcimonieuses des modes propres, permet également de résoudre le problème du compressed sensing. Il tente d'identifier l'un après l'autre les atomes du dictionnaire à utiliser pour représenter le signal. Le deuxième, CoSaMP, spécialement conçu pour le compressed sensing, est basé sur le même principe en autorisant d'abandonner des atomes utilisés pour la décomposition lors des itérations.

## 5 Simulations

Afin d'une part de démontrer la pertinence de la méthode et d'autre part de déterminer le type d'antenne à construire, des simulations sur des problèmes synthétiques aux grandeurs physiques inspirées des situations expérimentales ont été menées.

La plaque simulée a pour dimensions 20 cm par 20 cm, d'épaisseur 1 mm, en acier et en appui simple sur son pourtour. Son profil de vitesse est discrétisé sur un quadrillage régulier de 20 par 20 points.

Pour les deux modes propres de la figure 5 et pour les différentes antennes présentées précédemment (placées à 1 cm de la plaque), les estimations  $\hat{\mathbf{W}}$  des profils de vitesses  $\mathbf{W}$  ont été obtenues par Basis Pursuit en

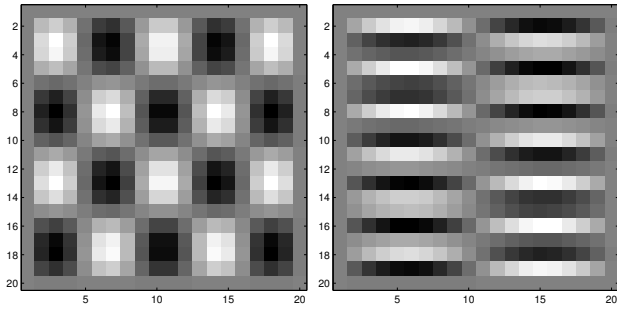


FIG. 5: Modes propres simulés. Fréquences respectives 292 Hz et 1054 Hz

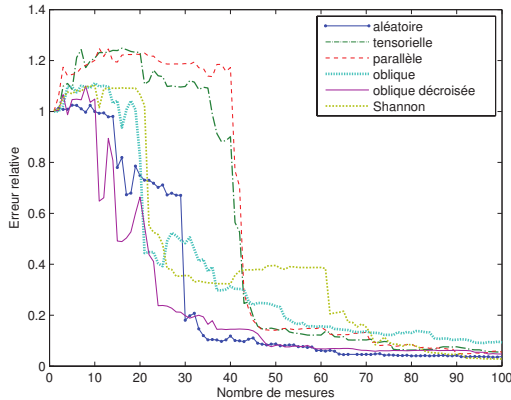


FIG. 6: Erreurs de reconstruction à 292 Hz

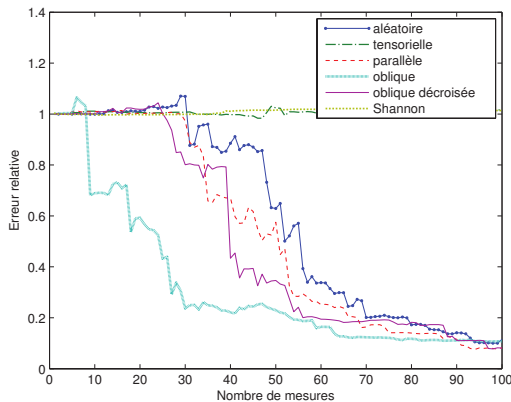


FIG. 7: Erreurs de reconstruction à 1054 Hz

utilisant de 1 à 100 capteurs tirés aléatoirement des antennes complètes de la figure 4. L'erreur tracée est définie par :

$$e = \frac{\|\dot{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{W}}\|_2}{\|\dot{\mathbf{W}}\|_2}$$

Le dictionnaire utilisé pour la décomposition est celui de la figure 2, où le domaine de la plaque  $\Omega$  est plongé dans un domaine  $\tilde{\Omega}$  de dimensions 40 cm par 40 cm. Il est à noter que les profils de vitesses simulés ne sont pas exactement parcimonieux dans le dictionnaire, situation à laquelle on sera souvent confronté dans des conditions expérimentales.

La figure 6 montre que pour avoir une reconstruction acceptable du profil de vitesse à 292 Hz discrétisé

sur 400 points, environ 50 mesures suffisent pour toutes les antennes. Ceci peut s'expliquer par la nature basses fréquences spatiales du profil. Cependant, sur la figure 7, on remarque qu'aux alentours de 50 mesures, les antennes aléatoires arrivent à reconstruire le signal alors que l'antenne tensorielle et l'antenne Shannon ne peuvent aboutir à une ébauche de reconstruction du profil pour 1054 Hz. Cette différence de comportement entre l'antenne Shannon et les antennes pseudo-aléatoires s'explique par le fait que l'antenne Shannon ne respecte pas le critère de Nyquist pour ce profil de vitesse, alors que les antennes aléatoires n'y sont pas soumises et peuvent, avec les algorithmes adaptés, reconstruire le profil de vitesse. Quant à l'antenne tensorielle, elle ne peut reconstruire le profil car celui-ci varie rapidement selon la direction orthogonale aux barres, et que les points d'échantillonnage présentent peu de diversité dans cette direction.

## 6 Conclusion

Cette nouvelle approche de l'holographie acoustique en champ proche, par l'utilisation de connaissances a priori sur la parcimonie des solutions, permet en théorie de réduire de façon importante le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction des déformées opérationnelles de plaques vibrantes. Dans cet article, nous avons ainsi montré par des résultats de simulations que des antennes aléatoires ou semi-aléatoires peuvent donner de meilleures performances que des antennes régulières, même quand elles utilisent moins de capteurs. Une géométrie d'antenne oblique décroisée représente un bon compromis entre performances simulées et faisabilité technique, et a été choisie pour l'application expérimentale présentée dans la partie II : *Mise en œuvre expérimentale* [4] de la présente étude.

## Remerciements

Ces travaux ont été soutenus par l'ANR par l'intermédiaire du projet ECHANGE (ANR-08-EMER-006).

## Références

- [1] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee. Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4) :1395–1413, 1985.
- [2] Earl G. Williams. Regularization methods for near-field acoustical holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(4) :1976–1988, 2001.
- [3] E. J. Candès and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 25(2) :21–30, 2008.
- [4] Antoine Peillot, Gilles Chardon, François Ollivier, and Laurent Daudet. Le 'compressed sensing' pour l'holographie acoustique de champ proche ii : Mise

en œuvre expérimentale. *10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.

- [5] J. A. Tropp and A. C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(12) :4655–4666, 2007.
- [6] Holger Rauhut. Random sampling of sparse trigonometric polynomials. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 22(1) :16 – 42, 2007.
- [7] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 43(1) :129–159, March 2001.
- [8] D. Needell and J.A. Tropp. Cosamp : Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3) :301 – 321, 2009.