

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Le problème inverse acoustique vu comme la solution d'un problème de Cauchy associé à l'équation de Helmholtz.

Christophe Langrenne, Alexandre Garcia

Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris cedex 3, {christophe.langrenne,alexandre.garcia}@cnam.fr

Depuis maintenant trente ans, l'imagerie acoustique a développé de nombreuses méthodes visant à caractériser des sources sonores : holographie de champ proche (NAH) en géométries simples, méthode d'éléments finis de frontières (BEM) pour des géométries plus complexes pour ne citer que les plus connues. Ces méthodes permettent de calculer l'opérateur de propagation entre les grandeurs de la structure à caractériser et les grandeurs mesurées. L'opération de rétro-propagation amplifie fortement le bruit de mesure car ce problème inverse est "mal-posé" au sens de Hadamard. Des méthodes de régularisation sont donc nécessaires pour stabiliser la résolution et trouver des solutions réalistes.

Généralement, par souci d'économie, seule la pression est mesurée autour de l'objet, mais l'essor des frontaux multivoies permet l'acquisition d'un nombre toujours plus grand de données. Ainsi, il est commun de mesurer la pression et son gradient à l'aide de sondes microphoniques calibrées ou des sondes pression/vitesse, sur un maillage conséquent.

Le problème inverse acoustique peut alors être vu comme la solution d'un problème de Cauchy associé à l'équation de Helmholtz : soit un domaine borné, connaissant les données de pression et de vitesse sur une partie des limites du domaine, on cherche à les déterminer sur la partie restante.

L'idée de base est de transformer ce problème mal-posé en deux problèmes bien posés, et de faire coïncider les deux solutions. Différentes méthodes mathématiques ont été développées, mais ne semblent pas avoir été utilisées en acoustique.

Nous présenterons deux de ces méthodes (Kozlov, opérateur de Steklov-Poincaré) et les illustrerons sur des simulations numériques.

1 Introduction

La caractérisation de sources acoustiques est un sujet important pour les industriels car à partir de mesures, on est à même de localiser les fortes vibrations et les zones responsables du rayonnement de l'objet ou de simuler *a posteriori* la présence de la source dans d'autres milieux. Si des mesures directes existent, de type accélérométriques ou par vibrométrie laser, elles sont, pour la première lourde à mettre en oeuvre, et pour la seconde, couteuse. Bons nombres d'études visent alors à résoudre le problème inverse acoustique qui consiste à partir de données de pressions en champ proche de reconstruire la vibration de la structure. Récemment, S.F. Wu [1] propose une synthèse des méthodes utilisées en acoustique.

De nos jours, la puissance de calcul toujours plus importante des ordinateurs permet des modélisations numériques de plus en plus fine. Ainsi, les méthodes d'éléments finis de frontières permettent des traitements d'objets plus étendus et pour des fréquences plus élevées. Apparaissent en parallèle des systèmes d'acquisition multivoies comportant des centaines de canaux de mesures et des capteurs permettant l'acquisition à la fois de la pression et de son gradient.

On peut alors envisager la résolution du problème inverse comme la solution du problème dit de Cauchy. Considérant un domaine borné, les conditions aux limites dans ce problème, sont sur-abondantes (pres-

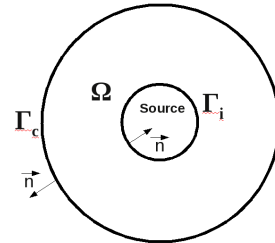


FIG. 1: Configuration du problème

sion et son gradient) sur une partie du domaine, tandis que sur une autre, elles sont inexistantes. Ce genre de problème est courant dans de nombreux domaines de la physique, lorsqu'une partie du domaine est inaccessible à la mesure (thermique, mécanique, opto-électronique, etc...).

Mathématiquement dans notre cas, le problème de Cauchy s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p = P^m, \partial_n p = V^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ p = p_s, \partial_n p = \partial_n p_s & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (1)$$

où P^m et V^m sont les grandeurs connues sur la limite du domaine Γ_c et les grandeurs p_s et $\partial_n p_s$ sont les inconnues à déterminer sur la frontière Γ_i (voir figure 1).

Pour résoudre ce problème (1), une première solution consiste à écrire la formulation intégrale sur les limites du domaine et à ré-organiser les opérateurs, correspondant aux données connues et aux inconnues. Le système discrétisé obtenu est alors un système linéaire classique où l'on doit inverser un opérateur. Ce problème est "mal-posé" au sens de Hadamard et une méthode de régularisation doit être utilisée afin d'obtenir une solution réaliste. La seconde résolution consiste à décomposer le problème initial en deux sous-problèmes bien posés et à faire coïncider les deux solutions sur l'ensemble du domaine. Une régularisation doit être également utilisée.

Dans cette communication, nous exposerons différentes méthodes de résolutions du problème de Cauchy, ainsi que des simulations numériques pour illustrer celles-ci.

2 Formulation intégrale de frontière sur le domaine

La formulation intégrale correspondant au système (1) est la suivante :

$$\iint_{\Gamma_c} (P^m \partial_n G(s, s') - V^m G(s, s')) dS + \iint_{\Gamma_i} (p_s \partial_n G(s, s') - \partial_n p_s G(s, s')) dS = 0. \quad (2)$$

Après discrétisation à l'aide d'une formulation isoparamétrique [2], on obtient le système matriciel :

$$D_c P^m - M_c V^m + D_i p_s - M_i \partial_n p_s = 0,$$

et après ré-organisation des grandeurs connues et inconnues :

$$\begin{bmatrix} D_i & -M_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_s \\ \partial_n p_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -D_c & M_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P^m \\ V^m \end{pmatrix}, \quad (3)$$

soit, une formulation classique de la forme $Ax = b$, où l'opérateur A est mal-conditionné. Sans précautions, des erreurs sur le second membre vont alors être démesurément amplifiées, et la solution obtenue sera irréaliste. Le problème rencontré est identique à celui de la résolution conventionnelle, où A représente l'opérateur de propagation entre la distribution de vitesse sur la structure de l'objet et celle de pression mesurée en champ proche. Le caractère évanescent du champ proche impose une limite, liée au rapport signal à bruit des mesures. Après une décomposition en valeurs singulières de l'opérateur A , la technique de régularisation consiste à filtrer les termes évanescents correspondants à des valeurs singulières trop petites. Lorsque le rapport signal à bruit est connu, nous pouvons utiliser le principe de Morozov basé sur une information *a priori* de la qualité des mesures. Sans connaissance, *a priori*, de ce rapport, d'autres techniques ont été développées dont la plus utilisée est la "L-curve", qui permet de faire un compromis entre la norme de la solution et la norme des erreurs de propagation. Effectivement, plus le filtrage est fort, plus la norme de la solution diminue, alors que l'erreur de propagation augmente [3].

3 Séparation en deux sous-problèmes bien posés

Le système (1) peut se décomposer en deux sous-systèmes bien posés, de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = P^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ \partial_n u_1 = \eta & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (4)$$

et

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_2 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u_2 = V^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ u_2 = \tau & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (5)$$

Ici, le système (4) correspond au problème aux limites de Dirichlet et Neumann, tandis que l'autre système (5) correspond au problème aux limites de Neumann et Dirichlet. Il existe des variantes à ces systèmes en combinant d'autres conditions aux limites de type Robin. La solution du système (1) est alors la solution des systèmes (4) et (5), lorsque celles-ci coïncident : $u_1 = u_2 = u$.

Pour ce faire, Kozlov et al [4] utilisent un algorithme itératif qui résout alternativement les systèmes (4) et (5). Une autre solution consiste à calculer l'opérateur de Steklov-Poincaré agissant sur la frontière Γ_i , technique utilisée lorsque l'on décompose le domaine en plusieurs sous-domaines et que les inconnues se trouvent sur une frontière commune aux différents sous-domaines [5]. Les paragraphes suivants décrivent la mise en oeuvre de ces deux techniques au problème d'imagerie.

3.1 Algorithme de Kozlov

Kozlov et al [4] propose un algorithme itératif basé sur la résolution des systèmes (4) et (5), alternativement. L'auteur montre que cet algorithme converge vers la solution pour un opérateur elliptique.

On choisit pour initier l'itération une solution η^0 et l'on résout le système (4). Cette solution permet de déterminer la condition limite τ^0 qui sera utilisée dans le problème (5), et ainsi de suite.

Malheureusement, dans nos essais, et comme le fait remarquer Marin [6], cette algorithme ne converge pas toujours pour l'équation de Helmholtz. Aussi, récemment, Johansson et Kozlov [7] proposent une variante de leur méthode adaptée à l'équation de Helmholtz. Cependant, la mise en oeuvre de cette variante pose le problème de l'arrêt du processus itératif. Une régularisation est nécessaire pour obtenir une solution réaliste, et le nombre d'itérations joue ce rôle. Les auteurs supposent connue la qualité des mesures et ils peuvent ainsi utiliser un critère d'optimalité de déviation donné par Morozov [8].

3.2 Opérateur de Steklov-Poincaré

Pour calculer l'opérateur de Steklov-Poincaré [5], les solutions de (4) et (5) se décomposent comme la somme de deux fonctions $u_1 = \omega_1^0 + \omega_1^*$ et $u_2 = \omega_2^0 + \omega_2^*$, solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\omega_1^0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_1^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \omega_1^0 = \lambda & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\omega_1^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_1^* = P^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ \omega_1^* = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\omega_2^0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \omega_2^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \omega_2^0 = \lambda & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\omega_1^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \omega_2^* = V^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ \omega_2^* = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (9)$$

où ω_1^0 et ω_2^0 sont les extensions harmoniques dans Ω de λ sur Γ_i , notée respectivement $H_-(\lambda)$ et $H_+(\lambda)$. Tandis que ω_1^* et ω_2^* sont les extensions harmoniques dans Ω de P^m et V^m de Γ_c , notée $R_-(P^m)$ et $R_+(V^m)$. Pour que les deux solutions coïncident, on utilise la condition sur Γ_i , du type :

$$\frac{\partial u_1(\lambda)}{\partial n} = \frac{\partial u_2(\lambda)}{\partial n}, \quad (10)$$

qui se traduit par le système à résoudre en λ :

$$S\lambda = \chi \quad \text{sur } \Gamma_i, \quad (11)$$

où

$$\chi := -\partial_n R_-(P^m) + \partial_n R_+(V^m) \quad (12)$$

et S est l'opérateur de Steklov-Poincaré, défini par :

$$S := \partial_n H_-(\lambda) - \partial_n H_+(\lambda). \quad (13)$$

Le système (11) se révèle également “mal-posé” et nécessite une régularisation.

4 Simulations numériques

4.1 Configuration des tests

Pour les simulations numériques la configuration des tests est la suivante. Les mesures sont simulées sur une sphère de rayon $r_1 = 0.3$ m. Les données reconstruites se situent sur une sphère de rayon $r_2 = 0.2$ m. Le maillage des deux surfaces est identique et est constitué de 24 octangles à 8 noeuds, soit 72 points pour chaque surface (figure 2). Les sources testées sont des sources simples dont on connaît une expression analytique pour la pression et son gradient. Nous avons pris deux sources tests à l'intérieur de la surface de rayon r_2 : un dipôle centré et un quadripôle latéral centré. La fréquence d'étude choisie arbitrairement à 150 Hz, relativement basse car notre discrétisation est grossière et n'autorise pas une étude à des fréquences élevées.

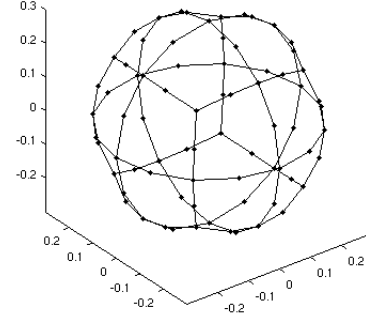


FIG. 2: Maillage d'une sphère en 24 octangles.

4.2 Implémentation numérique

Comme les systèmes sont résolus sous forme discrète, les opérateurs issus des formulations intégrales ne sont qu'une approximation des opérateurs continus. Ils sont obtenus à l'aide d'une formulation iso-paramétrique décrite par Seybert et *al* [2] et basée sur des fonctions de forme d'ordre 2, adaptées à des octangles à 8 noeuds.

Dans ces simulations, nous avons perturbé les données avec un taux de 1% d'erreur, ce qui correspond à des erreurs sur les pressions de l'ordre de ± 0.2 dB, représentatives d'erreurs de mesures.

4.3 Méthode de régularisation

Nous avons vu que pour obtenir des solutions réalistes, une méthode de régularisation est nécessaire. Nous utilisons celle de Tikhonov qui reste largement employée pour tout problème dit “mal-posé” [9]. Elle est basée sur la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\Phi_\alpha(x^\alpha) = \|Ax^\alpha - b\|^2 + \alpha \|Lx^\alpha\|^2, \quad (14)$$

où A est l'opérateur à inverser obtenu par les différentes méthodes, α le paramètre de régularisation et L un opérateur de régularisation.

Généralement, l'opérateur de régularisation est pris sous la forme d'une matrice identité pour minimiser la norme de la solution. Effectivement, l'opérateur A est mal-conditionné, ce qui provoque de fortes oscillations et des amplitudes totalement irréalistes, le second membre de (14) joue le rôle de stabilisateur de la solution.

Avec $L = Id$, des oscillations subsistent (voir figure 3), surtout sur la grandeur du gradient de pression. Nous utilisons alors un opérateur lissant qui correspond à minimiser la dérivée d'ordre 1 de la solution. Cet opérateur est approximé par différence finie.

Enfin, la résolution dépend du paramètre de régularisation α . Si celui-ci est trop élevé, la solution sera atténuée. Cela permet d'avoir une idée de la solution, mais sans les détails. On filtre alors excessivement les termes évanescents pour ne garder que les termes propagatifs. Si par contre, ce paramètre est trop faible, des oscillations apparaissent et la solution est trop sensible aux erreurs de mesures. Il faut donc faire un compromis et différentes techniques ont été développées pour

trouver celui-ci. Comme nous l'avons vu, le paramètre de régularisation est fortement dépendant du rapport signal à bruit de mesure. Si l'information sur l'erreur des mesures est connue, on peut utiliser le principe d'optimalité de déviation donné par Morozov. Une application est donnée dans [9]. Sans cette information, la "L-curve" permet de faire un compromis entre la norme de l'erreur de propagation, premier terme de (14) et la norme de la solution, second terme de (14). Dans certains cas, la courbe ne possède pas de cette caractéristique de "L" et le critère optimal ne peut être déterminé. Nous utilisons ici un critère quasi-optimal donné par Morozov [8] :

$$\alpha_{opt} = \min_{\alpha} \left\| \alpha \frac{dx^{\alpha}}{d\alpha} \right\|_2, \quad (15)$$

qui est interprété comme la sensibilité de la solution régularisée par rapport aux variations du paramètre α .

4.4 Résultats

Sur les figures qui suivent, nous représentons l'erreur relative entre le gradient de pression obtenu à l'aide des techniques présentées précédemment (équation 3 et 11) et la solution analytique connue :

$$E^{\alpha} = \frac{\|\partial_n p_s^{ex} - \partial_n p_s^{\alpha}\|_2}{\|\partial_n p_s^{ex}\|_2}. \quad (16)$$

Etant donné que le gradient de pression est le plus difficile à obtenir, nous présentons les résultats pour celui-ci.

Nous présentons également les résultats d'une rétropropagation classique, afin de pouvoir la comparer avec les autres techniques (rétropropagation à partir des données de pression, et des données de gradient).

Les figures 3 et 4 montrent l'effet de l'opérateur lissant d'ordre 1 sur le calcul du gradient dans le cas du dipôle. La solution est grandement améliorée, ne comporte plus d'oscillation et se superpose presque sur la solution exacte.

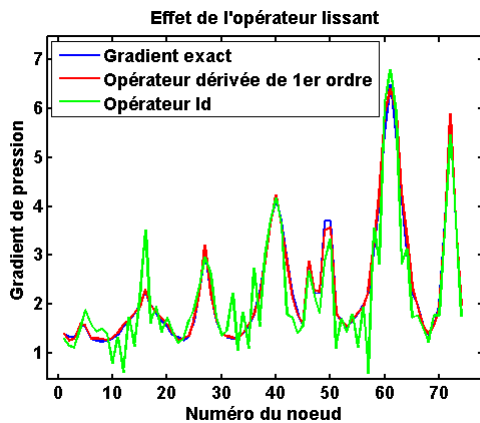


FIG. 3: Effet de l'opérateur lissant d'ordre 1 sur le gradient d'un dipôle centré.

Les figures 5 et 6 montrent les erreurs relatives correspondant aux cas du dipôle et du quadripôle centrés. Nous pouvons remarquer que la rétropropagation à partir des gradients de pression donne de meilleurs résultats que ceux obtenus à l'aide des pressions. Nous voyons

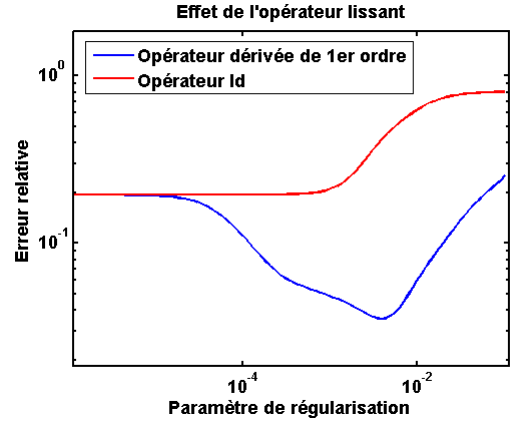


FIG. 4: Effet de l'opérateur lissant d'ordre 1 sur l'erreur relative correspondant au cas du dipôle centré.

que la résolution du problème de Cauchy améliore sensiblement les résultats par rapport à ceux d'une rétropropagation classique. Les deux formulations (3) et (11) donnent des résultats quasiment identiques.

Sur chacune des quatre courbes, un cercle permet de localiser la valeur du paramètre de régularisation donné par la formulation (15), qui ne correspond pas forcément au paramètre optimal. Sans information sur la qualité des mesures, ce critère reste cependant très performant, associé à la rétropropagation des gradients, la formulation intégrale de Cauchy et l'opérateur de Steklov-Poincaré. Par contre, il l'est moins pour la rétropropagation des pressions.

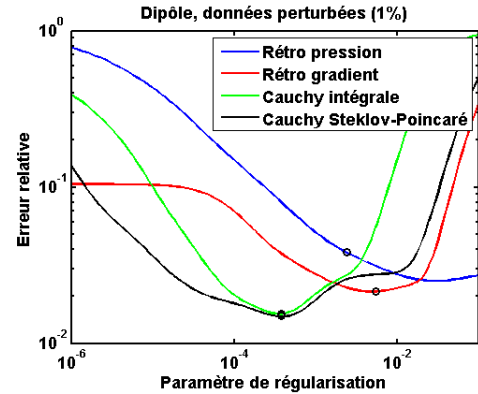


FIG. 5: Erreurs relatives dans le cas du dipôle centré pour les différents opérateurs.

5 Conclusion

Le développement technologique (acquisition multi-voies, puissance des ordinateurs) permet d'envisager la résolution du problème inverse acoustique comme la solution d'un problème de Cauchy de l'équation de Helmholtz. A partir de données surabondantes sur une partie des frontières du domaine (pressions et gradients), les inconnues sur une autre partie peuvent en être déduites.

En ce qui concerne la rétropropagation classique de données, deux formulations peuvent être obtenues : soit

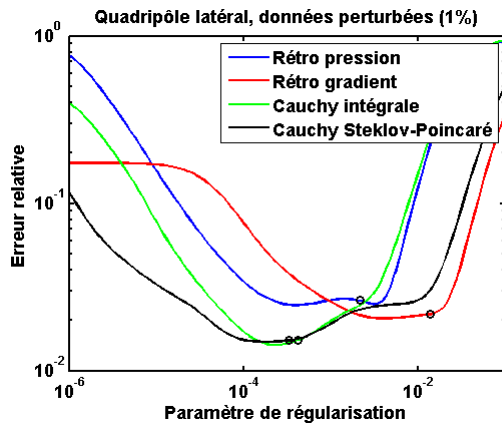


FIG. 6: Erreurs relatives dans le cas du quadripôle latéral centré pour les différents opérateurs.

à partir des pressions, soit à partir des gradients mesurés. Nous avons vu que celle qui est associée aux gradients donne de meilleurs résultats. Les formulations associées au problème de Cauchy améliorent encore sensiblement les solutions dans les simulations ici traitées.

Cependant une régularisation de Tikhonov est nécessaire pour obtenir des solutions réaliste. Un opérateur lissant d'ordre 1, construit par différence finie, améliore grandement les résultats. Le paramètre de régularisation donné par un critère de quasi-optimalité se révèle très performant.

Ces résultats préliminaires permettent d'envisager de manière optimiste ces méthodes sur des cas expérimentaux.

Références

- [1] S. F. Wu, “Methods for reconstructing acoustic quantities based on acoustic pressure measurements”, *J. Acoust. Soc. Am.* **124** (5), 2680-2697 (2008).
- [2] A. F. Seybert, B. Soenarko, F.J. Rizzo and D.J. Shippy, “An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions”, *J. Acoust. Soc. Am.* **77**, 362-368 (1985).
- [3] P. C. Hansen, “Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve”, *SIAM Rev.* **34**, 561-580 (1992).
- [4] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and A. V. Fomin, “An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations”, *Comput. Maths. Math. Phys.* **31** (1), 45-52 (1991).
- [5] J. B. Abdallah, “A conjugate gradient type method for the Steklov-Poincaré formulation of the Cauchy-Poisson problem”, *Int. J. of Appl. Math. and Mech.* **9** (1), 27-40 (2007).
- [6] N. S. Marin, L. Elliot, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic and X. Wen, “An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **192**, 702-722 (2003).

- [7] B. T. Johansson and V. A. Kozlov, “An alternating method for Cauchy problems for Helmholtz-type operators in non-homogeneous medium”, *IMA Journal of Applied Mathematics* **74**, 62-73 (2009).
- [8] V. Badeva, V. Morozov, “Problèmes incorrectement posés, théorie et applications”, éd. Masson, 1991.
- [9] E. G. Williams, “Regularization methods for near-field acoustical holography”, *J. Acoust. Soc. Am.* **110** (4), 1976-1988 (2001).