

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Simulation de Guides d'Ondes stables pour des tubes acoustiques convexes

Rémi Mignot¹, Thomas Hélie¹, Denis Matignon²

¹ IRCAM & CNRS UMR 9912, 1 place Igor Stravinsky. 75004 Paris

² ISAE, Applied Mathematics Training Unit. 10, av. E. Belin, B.P. 54032. F-31055 Toulouse cedex4

Ce travail porte sur la modélisation physique des tubes acoustiques pour la simulation en temps-réel, en utilisant l'approche dite des "Guides d'Ondes Numériques" et l'équation des pavillons. Avec cette approche, un tronçon de tube acoustique est représenté par un système bouclé avec retards (pour la propagation d'ondes), à 2 entrées et 2 sorties et faisant intervenir plusieurs sous-systèmes sans retards internes. Une forme connue de ce système bouclé est celle dite de "Kelly-Lochbaum". Elle a pour avantage de réduire la complexité de la simulation et d'avoir une interprétation physiquement sensée des sous-systèmes mis en jeu.

Nous nous intéressons ici plus particulièrement à des profils de tubes convexes, avec un coefficient de courbure constant et négatif. Dans la littérature, il a été montré que de tels tubes possèdent des modes dits "capturés". Avec une approche d'automatique adaptée aux "Guides d'Ondes", ce phénomène se manifeste par la présence de plusieurs sous-états du système qui n'agissent pas sur les sorties.

Cependant, avec le modèle acoustique que nous utilisons mis sous la forme de "Kelly-Lochbaum", deux problèmes surviennent : premièrement, même si les sorties sont bornées, certains des sous-états ont des valeurs qui divergent exponentiellement, deuxièmement ces sous-états sont en nombre infini. Le système est alors instable et ne peut être simulé tel quel.

La levée du problème est obtenue de la manière suivante : premièrement nous montrons qu'il existe une forme standard simple compatible avec l'approche des "Guides d'Ondes", pour laquelle il existe une infinité de solutions qui redonnent les relations entrées/sorties du système. Deuxièmement nous cherchons une solution qui garantit la stabilité du système, et qui facilite l'approximation pour obtenir une simulation temporelle faible coût.

1 Introduction

Dans [1] et [2], la modélisation de propagation d'ondes acoustiques dans des tubes convexes a été étudiée, et ces études ont montré la présence de modes piégés. De façon similaire au modèle de connexions de cônes avec une différence de pente négative (cf. eg. [3]), des problèmes de stabilité se posent. Puisque ces instabilités ne s'expriment pas d'un point de vue global, pour la simulation des solutions ont consisté à considérer le système dans sa globalité, en utilisant par exemple des approches modales ou par convolution par des filtres à réponse impulsionnelle finie.

Cependant, pour la simulation numérique avec un faible coût de calcul, les approches modales nécessitent de tronquer des modes, ce qui pose des problèmes de réalisme, et en raison de phénomènes à mémoire longue (du type diffusif pour les pertes visco-thermiques par exemple) les méthodes par convolution sont mal adaptées puisque les réponses impulsionnelles décroissent très lentement.

Dans [4], des tubes évasés ont été modélisés par l'approche des "Guides d'Ondes" (cf. eg. [5]) avec le modèle des pavillons de Webster (cf. [6]) et la prise en compte des pertes visco-thermiques (cf. [7, 8]). La structure de simulation de Kelly-Lochbaum a alors été obtenue (cf.

eg. [9]). Ce système est constitué de retards modélisant la propagation d'ondes à travers des tronçons de tube et de filtres récursifs pour les réflexions/transmissions aux jonctions de tronçons. Ce modèle a conduit à des simulations numériques à faible coût.

Néanmoins, l'application de ce modèle pour des tubes convexes pose des problèmes de stabilité. Le but de ce travail est d'obtenir une réalisation numérique stable pour les tubes convexes, proche de celle de [4].

Le document s'organise de la manière suivante. La partie 2 présente le modèle acoustique utilisé, le modèle de Webster-Lokshin, et 2 systèmes équivalents pour la simulation. En partie 3, nous faisons une analyse des singularités des fonctions de transfert mises en jeu dans le modèle, et expliquons l'origine des instabilités pour les tubes convexes. En partie 4, nous proposons une structure "généralisée" pour la simulation, qui permet de décrire le modèle acoustique avec 2 degrés de liberté qui sont 2 fonctions de transfert du système. En partie 5, nous choisissons ces 2 fonctions de transfert de sorte à obtenir une réalisation numérique stable pour les tubes convexes, compatible avec les guides d'ondes et proche de la structure de simulation de [4]. Enfin, la partie 6 conclut et ouvre sur des perspectives.

2 Modèle acoustique et systèmes

2.1 Modèle de Webster-Lokshin

Le modèle de *Webster-Lokshin* est un modèle 1D, qui caractérise la propagation linéaire d'ondes acoustiques dans des tubes à symétrie axiale, avec l'hypothèse faible de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi (voir [8, 10]), et prenant en compte les pertes viscothermiques à la paroi avec l'hypothèse de tubes larges (voir [7, 11]). La pression acoustique P et le débit acoustique U sont gouvernés par les 2 équations suivantes, données dans le domaine de Laplace :

$$\left(\frac{s^2}{c^2} + 2\varepsilon(\ell) \frac{s^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{3}{2}}} + \Upsilon(\ell) - \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} \right) \{ r(\ell) P(\ell, s) \} = 0, \quad (1)$$

$$\rho s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \frac{\partial}{\partial \ell} P(\ell, s) = 0, \quad (2)$$

où $s \in \mathbb{C}$ est la variable de Laplace ($\Im m(s) = \omega$ est la pulsation), ℓ est l'abscisse curviligne à la paroi, $r(\ell)$ est le rayon du tube, $S(\ell) = \pi r(\ell)^2$ est l'aire d'une section, $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \sqrt{1 - r'(\ell)^2 / r(\ell)}$ quantifie les pertes viscothermiques (en $\text{m}^{-\frac{1}{2}}$) et $\Upsilon(\ell) = r''(\ell) / r(\ell)$ représente la courbure du tube. L'équation (1) est appelée l'équation de *Webster-Lokshin*, et (2) est l'équation d'*Euler* satisfaite en dehors de la couche limite associée aux pertes.

2.2 Deux systèmes équivalents

Nous définissons un tronçon par un tube fini de longueur L et de coefficients des pertes et de courbure constants (ε et Υ). Nous allons construire des systèmes représentant les effets acoustiques d'un tronçon sur les ondes progressives données par :

$$\phi^\pm = \frac{r}{2} (P \pm ZU), \quad \text{où } Z(\ell) = \frac{\rho c}{S(\ell)}. \quad (3)$$

Dans [4], les effets d'un tronçon de tube sur les ondes $\phi^\pm$ sont mis sous forme de systèmes entrées/sorties pour le modèle de *Webster-Lokshin*. Deux formes équivalentes (d'un point de vue entrées/sorties) y sont données.

Une première forme, dite "globale", est représentée en Fig. 1-(a). Les 4 fonctions de transfert représentent les effets globaux du tronçon sur les ondes $\phi^\pm$: R_g^l et R_g^r pour les réflexions de gauche et de droite, et T_g pour la transmission à travers le tronçon. "global" signifie que tous les effets internes y sont mélangés et prennent donc en compte les aller-retour d'ondes successifs.

Une seconde forme, dite "décomposée", est représentée en Fig. 1-(b). Cette forme a pour intérêt d'isoler les effets acoustiques internes dans des fonctions de transfert. Par exemple, R_{le} représente la réflexion de ϕ_0^+ à l'interface gauche du tronçon, et T représente la propagation à travers le tronçon. Ici les aller-retour d'ondes sont représentés par la boucle interne. Cette forme permet de retrouver la structure de *Kelly-Lochbaum* qui est bien adaptée à la simulation numérique par guides d'ondes (cf. eg. [9]).

Définissons $\Gamma(i\omega) = ik(\omega)$, où $k(\omega)$ est le nombre d'onde complexe standard. La fonction Γ est donnée dans le domaine de Laplace par :

$$\Gamma(s) = \sqrt{\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon}. \quad (4)$$

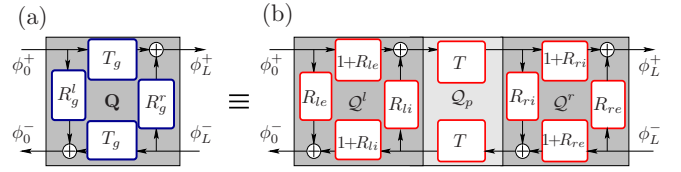


FIGURE 1 – Quadripôle $\mathbf{Q}$ et sa forme décomposée.

La résolution de (1) et (2) donne les fonctions de $\mathbf{Q}$

$$T_g = \{A_T \cosh(\Gamma L) + B_T \sinh(\Gamma L) / \Gamma\}^{-1}, \quad (5)$$

$$R_g^l = \{A_R \cosh(\Gamma L) + B_{R^l} \sinh(\Gamma L) / \Gamma\} T_g, \quad (6)$$

$$R_g^r = \{A_R \cosh(\Gamma L) + B_{R^r} \sinh(\Gamma L) / \Gamma\} T_g, \quad (7)$$

où A_T , A_R , B_T , B_{R^l} et B_{R^r} sont des fonctions connues de s et $\Gamma(s)^2$. Avec $\zeta = r'/r$, les fonctions de la forme décomposée sont données dans [4] :

$$T(s) = e^{-\Gamma(s)L}, \quad (8)$$

$$R_{le}(s) = \frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) - \zeta_l}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) + \zeta_l}, \quad R_{li}(s) = -\frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) + \zeta_l}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) + \zeta_l}, \quad (9)$$

$$R_{re}(s) = \frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) + \zeta_r}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) - \zeta_r}, \quad R_{ri}(s) = -\frac{\frac{s}{c} - \Gamma(s) - \zeta_r}{\frac{s}{c} + \Gamma(s) - \zeta_r}. \quad (10)$$

Avec $\tau := L/c$, notons qu'on peut écrire $T_g(i\omega) = D_g(i\omega) e^{-i\omega\tau}$ et $T(i\omega) = D(i\omega) e^{-i\omega\tau}$, où D_g et D sont des fonctions de transfert associées à des systèmes causaux. En conséquence, les réponses impulsionnelles de T_g et T sont celles de D_g et D retardées de τ correspondant au temps de propagation à travers le tronçon.

Dans le cas des tubes à courbures négatives ($\Upsilon < 0$) ces deux formes présentent un paradoxe : alors que des calculs numériques montrent que la forme globale de la Fig. 1-(a) est stable, les fonctions de transfert de la forme décomposée de la figure 1-(b) possèdent dans le domaine de Laplace des singularités à l'origine d'instabilités du système. La partie suivante a pour objectif de comprendre l'origine de ce problème.

3 Analyse des singularités

3.1 Analyse complexe de Γ

La fonction $\Gamma(s)$ (associée à un nombre d'onde $k(\omega)$, cf. (4)) est définie comme une racine carrée d'un nombre complexe contenant lui-même une racine de s . Or il existe une infinité de prolongements de la racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ pour le plan complexe, et nous devons en choisir un pour définir dans $\mathbb{C}$ les fonctions de transfert du système.

Dans [12, 13], la fonction Γ est définie par le choix de lignes (appelées *coupures*) reliant des *points de branchement* à l'infini. Ces coupures sont des ensembles continus et infinis de singularités, se manifestant par des discontinuités de $\Gamma(s)$. Quant aux points de branchement s_n , ils sont les solutions de $\Gamma(s)^2 = 0$, et $s_0 = 0$ (pour $\sqrt{s}$).

$\Upsilon = 0$: Pour les cylindres et les cônes, l'unique point de branchement est $s_0 = 0$.

$\Upsilon > 0$: Pour les tubes évasés, Γ a 3 points de branchement : $s_0 = 0$, s_1 et $s_2 = \bar{s}_1$, avec $\Re(s_1) \leq 0$.

$\Upsilon < 0$: Pour les tubes convexes, Γ a 2 points de branchement : $s_0 = 0$, et $s_1 \in \mathbb{R}^+$.

Alors que ces points de branchement sont fixes (ils dépendent de c , ε et Υ), les coupures sont à choisir.

Pour les courbures positives ou nulles, puisque aucun point de branchement ne se trouve dans le demi-plan droit de Laplace (que l'on nomme $\mathbb{C}_0^+ := \{s \in \mathbb{C} / \Re(s) > 0\}$), il est alors possible de définir un prolongement analytique dans $\mathbb{C}_0^+$ pour respecter la stabilité. La figure 2 présente le cas de coupures horizontales.

Mais pour les courbures négatives, un des points de branchement, s_1 , se trouve dans $\mathbb{C}_0^+$, ainsi il n'est pas possible de définir un prolongement analytique dans $\mathbb{C}_0^+$ puisqu'au moins une partie de coupure se retrouve dans $\mathbb{C}_0^+$. La figure 2 présente le cas de 2 coupures se chevauchant sur $\mathbb{R}^- :]-\infty, 0]$ et $]-\infty, s_1]$.

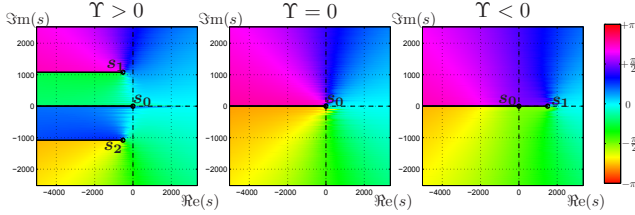


FIGURE 2 – Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe, points de branchement et coupures horizontales.

3.2 Pôles et interprétation physique

Alors que les fonctions de transfert de la forme décomposée (cf. (8-10)) ont le même type de singularités que Γ (du type coupures), les 3 fonctions de transfert globales (cf. (5-7)) sont fonctions de $\Gamma(s)^2$ et non $\Gamma(s)$ (la transformation $\Gamma \mapsto -\Gamma$ les laisse invariant). Ainsi ces 3 fonctions de transfert n'ont qu'une seule coupure venant de $\sqrt{s}$, et d'autres singularités du type pôles associés aux modes des résonances du tronçon.

Cette dernière remarque implique que seules les fonctions de transfert de la forme décomposée dépendent du choix de Γ . Les relations globales (entrée/sortie) ne dépendent pas du choix des coupures partant de s_1 et s_2 (dues à la courbure) mais seulement de celle partant de $s_0 = 0$ (due aux pertes visco-thermiques). Pour ce point de branchement, nous choisissons toujours $\mathbb{R}^-$ pour des raisons de stabilité et de symétrie hermitienne.

Dans [14], Γ est donné par $\sqrt{\cdot}$ définie par

$$\sqrt{\cdot} : s = \rho \exp(i\theta) \mapsto \sqrt{s} = \sqrt{\rho} \exp(i\theta/2), \quad (11)$$

avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi]$. Avec ce choix de Γ , l'ensemble des coupures est $\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C} := \{s \in \mathbb{C} / \Gamma(s)^2 \in \mathbb{R}^-\}$. Pour cette définition, Γ a pour propriété :

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \quad \Re(\Gamma(s)) > 0. \quad (12)$$

En conséquence, quand L augmente, nous avons :

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \quad T(s) = e^{-\Gamma(s)L} \rightarrow 0, \quad \text{quand } L \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Ainsi, dans la forme décomposée de la figure 1-(b), $T(s)$ se comporte comme un "coupe-circuit" à la limite. On démontre alors le résultat

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} R_g^L(s) = R_{le}(s). \quad (14)$$

La fonction R_{le} est donc interprétée comme la réflexion globale du tube évasé semi-infini à droite

(ou anéchoïque). Nous retrouvons un raisonnement similaire à celui de [3] pour les cônes.

Nous constatons alors la convergence des pôles et des zéros de R_g^L vers la coupure $\mathcal{C}$ de R_{le} quand L augmente. Ainsi, la coupure s'interprète comme une densification de pôles et de zéros entrelacés. La figure 3 illustre cette convergence pour $\Upsilon > 0$.

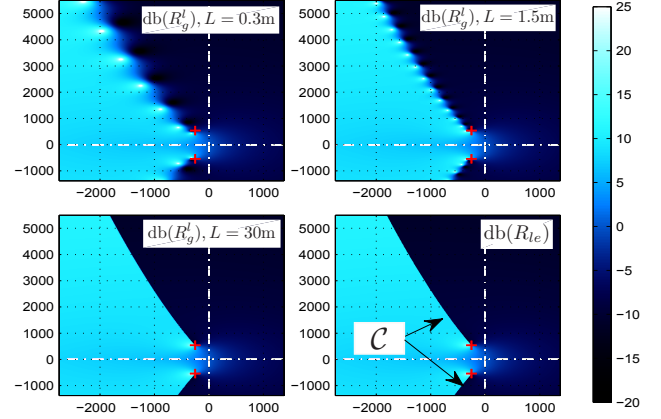


FIGURE 3 – Convergence des pôles et des zéros de R_g^L quand $L \rightarrow \infty$ (avec $\Upsilon > 0$). Les pôles, zéros et points de branchement sont respectivement représentés par des points blancs, noirs, et des croix rouges.

3.3 Interprétation pour $\Upsilon < 0$

Pour les coupures négatives, en raison de la partie de coupure sur $[0, s_1] \subset \mathbb{R}^+$, les fonctions associées ont une infinité de singularités à l'origine d'instabilités. Or des observations numériques montrent que les fonctions de transfert globales du tronçon, qui n'ont pas cette coupure, sont bien stables, comme attendu.

Les tubes à courbure $\Upsilon = r''/r$ constante négative sont de forme sinusoidale, et changent de signe tout les $L_{crit} := \pi\sqrt{|\Upsilon|}$. Or on constate numériquement que quand L augmente un pôle p_k de R_g^L devient instable dès que la longueur L du tronçon dépasse une valeur entière k de L_{crit} . La figure 4 illustre ceci.

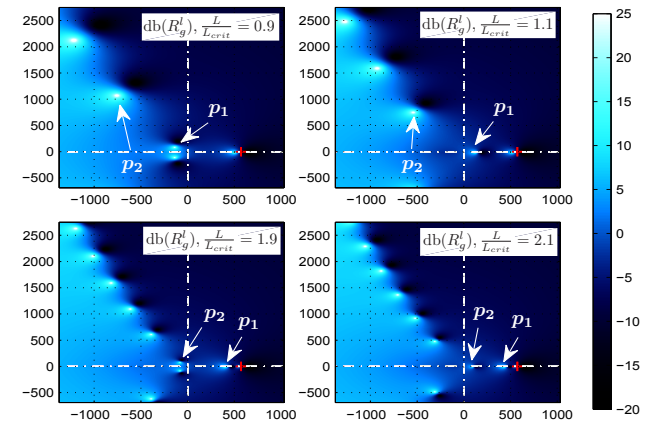


FIGURE 4 – Passage des pôles de $\mathbb{C}_0^-$ vers $\mathbb{R}^+$, pour $\Upsilon < 0$.

Dans ce cas, quand $L \rightarrow \infty$ une infinité de pôles deviennent instables et se densifient sur $[0, s_1]$. Ainsi, pour $L < L_{crit}$ les fonctions de transfert globales du tronçon sont stables, mais les fonctions de transfert de la forme

décomposée qui sont associées à des tubes semi-infinis ont une infinité de singularités instables. Ce phénomène provient de la décomposition originale de la figure 1-(b) bien adaptée pour la simulation en guides d'onde pour les courbures positives. Pour les courbures négatives nous devons alors chercher une autre décomposition adaptée aux guides d'ondes et stables pour les courbures négatives.

4 Structure généralisée

4.1 Forme globale et forme décomposée

Nous avons vu, que le tronçon peut être modélisé par 2 systèmes (cf. Fig. 1). Le premier est donné par le quadripôle $\mathbf{Q}$ et ses 4 fonctions globales ; et le second par une forme décomposée avec 10 fonctions de transfert.

Forme globale : Quel que soit le signe de la courbure, les fonctions de transfert globales R_g^l , R_g^r , et T_g sont stables. De plus nous savons qu'elles n'ont qu'une coupure sur $\mathbb{R}^-$ due aux pertes. Les simuler telles quelles, par une approche modale, permettrait d'obtenir une réalisation stable du tronçon. Mais pour une réalisation faible coût simulable en temps-réel il est nécessaire de "tronquer" les modes, ce qui pose des problèmes de réalisme.

Forme décomposée : Cette forme a l'avantage d'être adaptée à la modélisation par *guides d'ondes*, mais pose des problèmes de stabilité. Pour les courbures négatives, il y a l'apparition d'une partie de coupure instable dans $\mathbb{R}^+$.

Nous voyons dans la prochaine partie qu'il existe une infinité de représentations du tronçon et nous en obtenons une paramétrisation qui nous permettra de trouver une réalisation stable en partie 5 respectant dans une certaine mesure le formalisme des guides d'ondes.

4.2 Forme standard d'un tronçon

Dans un premier temps nous cherchons à représenter les deux formes de la figure 1 par une structure commune : la structure de la figure 5 est équivalente à l'une des 2 formes (globale ou décomposée) si les égalités suivantes sont vérifiées :

Forme globale :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l &= R_g^l, & \mathcal{F}_l &= D_g, & \mathcal{G}_l &= 0, \\ \mathcal{H}_r &= R_g^r, & \mathcal{F}_r &= D_g, & \mathcal{G}_r &= 0. \end{aligned}$$

Forme décomposée :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l &= \mathcal{R}_{le}, & \mathcal{F}_l &= D(1 + R_{ri})(1 + R_{le}), \\ \mathcal{H}_r &= \mathcal{R}_{re}, & \mathcal{F}_r &= D(1 + R_{li})(1 + R_{re}), \\ \mathcal{G}_l &= \frac{R_{li}D(1+R_{ri})}{1+R_{li}}, & \mathcal{G}_r &= \frac{R_{ri}D(1+R_{li})}{1+R_{ri}}. \end{aligned}$$

où D et D_g correspondent aux transmissions T et T_g sans le retard en facteur : $T(s) = D(s)e^{-\tau s}$ et $T_g(s) = D_g(s)e^{-\tau s}$. Les autres fonctions de la forme décomposée sont données par (8-10).

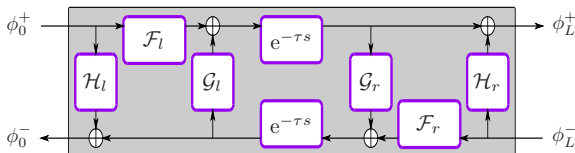


FIGURE 5 – Forme standard d'un tronçon

4.3 Paramétrisation

Dans un cas général, la forme standard (Fig. 5) permet de représenter le tronçon de tube si les formules algébriques suivantes sont vérifiées.

$$R_g^l = \mathcal{H}_l + (\mathcal{F}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}) / (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}), \quad (15)$$

$$R_g^r = \mathcal{H}_r + (\mathcal{F}_r \mathcal{G}_l e^{-2\tau s}) / (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}), \quad (16)$$

$$D_g = \mathcal{F}_l / (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}), \quad (17)$$

$$= \mathcal{F}_r / (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}). \quad (18)$$

On remarque alors que l'on a 2 degrés de liberté. En choisissant $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ comme degrés de liberté, la résolution du système (15-18) donne

$$\mathcal{H}_l = R_g^l - D_g \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}, \quad (19)$$

$$\mathcal{H}_r = R_g^r - D_g \mathcal{G}_l e^{-2\tau s}, \quad (20)$$

$$\mathcal{F}_l = D_g (1 - \mathcal{G}_l \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}), \quad (21)$$

$$\mathcal{F}_r = D_g (1 - \mathcal{G}_r \mathcal{G}_r e^{-2\tau s}). \quad (22)$$

Ainsi, il est possible de choisir arbitrairement les fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, tout en préservant les relations entrées/sorties originales du système. Nous avons donc une paramétrisation du système par 2 fonctions. Par exemple la forme globale correspond au choix : $\mathcal{G}_l = 0$, $\mathcal{G}_r = 0$.

Dans le cas de la forme décomposée, les 6 fonctions de transfert n'ont pas de retard interne, les modes du tronçon sont simulés par la boucle du système. Pour la forme globale, $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_r = 0$, la boucle est dans ce cas ouverte, les modes sont alors simulés par les retards contenus dans les dénominateurs des 4 autres fonctions.

Remarques : Quel que soit le choix de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ causales et stables, $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ définies par (15-18) sont elles aussi causales et stables. De plus, choisir $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ inférieurs à 1 en module dans $\mathbb{C}_0^+$ permet de garantir la stabilité de la boucle interne du système.

Il nous faut donc chercher maintenant des fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ qui permettent d'assurer la stabilité du système, et de conserver le formalisme des *guides d'ondes*.

5 Réalisation stable pour un tronçon convexe

5.1 Stabilisation des tubes convexes

Pour l'approche des *guides d'ondes*, le choix "idéal" est celui de la forme décomposée. Avec

$$R_{li}^* := \frac{R_{li}(1 + R_{ri})}{1 + R_{li}} D \text{ et } R_{ri}^* := \frac{R_{ri}(1 + R_{li})}{1 + R_{ri}} D, \quad (23)$$

ce choix "idéal" est donné par $\mathcal{G}_l = R_{li}^*$ et $\mathcal{G}_r = R_{ri}^*$. Cependant ces fonctions sont des fonctions de Γ et ont donc des singularités instables sur $[0, s_1]$ pour $\Upsilon < 0$. Nous devons donc faire un autre choix.

5.1.1 Que peut être un "bon choix" ?

Pour comprendre qualitativement ce que peut être un "bon choix" de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ regardons par exemple l'expression de la fonction $\mathcal{F}_l$ donnée par (21) :

$$\mathcal{F}_l(s) = D_g(s) (1 - \mathcal{G}_l(s) \mathcal{G}_r(s) e^{-2\tau s}).$$

La fonction D_g possède une coupure sur $\mathbb{R}^-$ en raison des pertes, et une infinité de paires de pôles complexes conjugués dans $\mathbb{C}_0^-$ qui correspondent chacune à un mode du tronçon. Ces pôles sont les zéros du dénominateur de D_g qui est : $1 - R_{li}^* R_{ri}^* e^{-2\tau s}$. Choisir $\mathcal{G}_l = R_{li}^*$ et $\mathcal{G}_r = R_{ri}^*$, permet de compenser exactement les pôles de D_g . Avec ce choix, $\mathcal{F}_l$ n'a plus de pôle comme singularité, mais uniquement la coupure $\mathcal{C}$ de Γ .

L'idée que nous proposons et testons ici, est de compenser les pôles en hautes fréquences (il y en a une infinité) par la boucle interne de la structure en faisant un choix qui vérifie $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R_{li}^*(i\omega)$ et $\mathcal{G}_r(i\omega) \approx R_{ri}^*(i\omega)$ pour $|\omega|$ grand, mais avec $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$. Et les quelques pôles restant du système en basses fréquences sont alors simulés tels quels par les 4 fonctions $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ données par (19-22).

5.1.2 Comment trouver un “bon choix” ?

Pour simplifier les choses, nous modifions artificiellement les fonctions R_{li}^* et R_{ri}^* par une transformation $s \mapsto \gamma(s)$ du plan de Laplace. Ceci donne

$$\mathcal{G}_l(s) := R_{li}^*(\gamma(s)), \text{ et } \mathcal{G}_r(s) := R_{ri}^*(\gamma(s)). \quad (24)$$

Maintenant le choix ne réside plus que dans celui de cette “transformation”. Pour assurer le bon comportement en hautes fréquences ($\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R_{li}^*(i\omega)$ et $\mathcal{G}_r(i\omega) \approx R_{ri}^*(i\omega)$), on pose pour γ :

$$\forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+} \text{ avec } |s| \text{ grand} : \gamma(s) \approx s. \quad (25)$$

Remarque : L'expression “ $|s|$ grand” est volontairement imprécise. En théorie, nous souhaitons que $\gamma(i\omega)$ tende très rapidement vers $i\omega$ quand $|\omega|$ augmente.

5.1.3 Propriété d'une “bonne transformation”

En plus de vérifier (25), il est intéressant de maîtriser les singularités de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par le choix de γ . Dans un premier temps la transformation choisie doit assurer la stabilité et la passivité de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, et si possible limiter l'ensemble de leurs singularités. Pour garantir la bonne définition des fonctions, nous donnons les contraintes

- P1 : γ est à symétrie hermitienne,
- P2 : γ est analytique dans $\mathbb{C}_0^+$,
- P3 : $] -\infty, s_1] \cap \gamma(\mathbb{C}_0^+) = \{\emptyset\}$,
- P4 : $\forall s \in \mathbb{C}_0^+, |R_{li}^*(\gamma(s))| < 1$ et $|R_{ri}^*(\gamma(s))| < 1$.

Avec ces propriétés, choisir $\mathcal{G}_l(s) := R_{li}^*(\gamma(s))$ et $\mathcal{G}_r(s) := R_{ri}^*(\gamma(s))$ définit des fonctions à symétrie hermitienne (P1), holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$ (P2, P3 et parce que R_{li}^* et R_{ri}^* ont leurs singularités sur $] -\infty, s_1]$ uniquement) et P4 garantit la stabilité de la boucle.

Remarquons que l'ensemble des coupures de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ devient $\mathcal{C}^\dagger := \{s \in \mathbb{C} / \gamma(s) \in] -\infty, s_1]\}$ (avec $\mathcal{C}^\dagger \subset \mathbb{C}_0^-$ grâce à P3). La transformation γ permet donc de repousser la partie instable de la coupure de Γ ($[0, s_1] \subset \mathbb{R}^+$) dans $\mathbb{C}_0^-$, ce qui stabilise les fonctions de transfert.

5.2 Réalisation numérique stable

Nous donnons maintenant des résultats de réalisations stables d'un tronçon à courbure négative en utilisant l'idée présentée précédemment avec un certain nombre de considérations obtenues empiriquement.

La procédure est résumée par les étapes suivantes :

- Nous choisissons les fonctions paramètres $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par le choix de la transformation γ .
- Nous en déduisons $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$.
- Nous approximations les 6 fonctions de transfert par des filtres standard simulables numériquement.

5.2.1 Définition de la transformation

Dans la pratique, au lieu de chercher γ bien défini dans $\mathbb{C}$, nous limitons la recherche à $i\mathbb{R}$ (domaine de Fourier). Donc nous cherchons un contour défini par $\gamma(i\mathbb{R})$.

En hautes fréquences, ce contour doit se rapprocher au plus près de l'axe imaginaire (voir (25)), alors nous le choisissons tel que $\gamma(i\omega) = i\omega$ pour $|\omega| > \omega_0$, où ω_0 est une pulsation que nous nommons *pulsation de raccord*.

En basses fréquences, il doit non seulement contourner la partie de la coupure $[0, s_1]$ (pour garantir P3), mais aussi contourner l'ensemble des $s \in \mathbb{C}$ tels que $|R_{li}^*(s)| > 1$ et $|R_{ri}^*(s)| > 1$ (P4).

De plus, ce contour doit vérifier une contrainte de régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur $i\mathbb{R}$ (condition nécessaire pour P2). Ainsi le “raccord” en $\pm\omega_0$ entre les basses fréquences et les hautes fréquences doit se faire avec la continuité de toutes ses dérivées.

Afin de ne simuler que les 2 premiers modes du tronçon, la pulsation ω_0 est choisie égale à $\Im m(p_2)$ où p_2 est le pôle associé au deuxième mode du tronçon.

La figure 6 illustre le contour $\gamma(i\omega)$ qui contourne la coupure, et la courbe de niveau à 1.

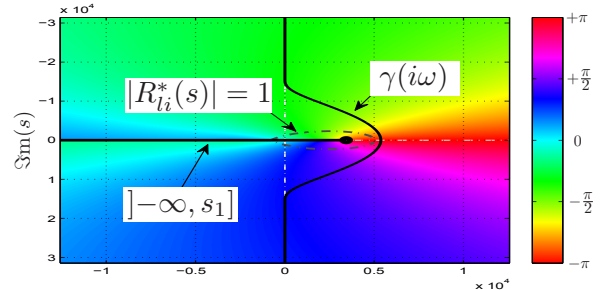


FIGURE 6 – Phase de R_{li}^* et contour $\gamma(i\omega)$.

5.2.2 Approximation et résultats

Précédemment, nous avons choisi une transformation γ qui définit les fonctions paramètres $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$. Nous en déduisons alors $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ par les relations (19-22), qui redonnent les relations entrée/sortie du système globale. Pour un tronçon donné, ce choix permet de définir un système composé de fonctions de transfert stables, et contenant une boucle retardée stabilisée ($|\mathcal{G}_l| < 1$ et $|\mathcal{G}_r| < 1$ dans $\mathbb{C}_0^+$), cf. Fig. 5.

Pour la réalisation numérique du système, d'abord les fonctions de transfert $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ sont approximées par des filtres standard simulables numériquement. Ce type d'approximation est présenté dans [12, 13], il nécessite ici le placement de quelques pôles sur $\mathbb{R}^-$.

Pour $\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$, le même type d'approximation est réalisé. Ici, pour $|\omega| > \omega_0$, $\mathcal{G}_l(i\omega) = R_{li}^*(i\omega)$ et $\mathcal{G}_r(i\omega) = R_{ri}^*(i\omega)$, en conséquence les modes du tronçon de fréquences supérieures à ω_0 sont simulés par la boucle interne du système. Il reste alors les modes de fréquences inférieures, au nombre de 2, qui sont alors simulés par 2 paires de pôles complexes conjugués.

Nous avons construit la réalisation d'un tube convexe avec les paramètres suivant : $r_0 = 7$ cm, $r_L = 10$ cm, $\Upsilon = -100$ m⁻², $L = 15$ cm, et $\varepsilon = 0.0033$ m^{-1/2}. La pulsation de raccord est calée sur le deuxième mode du tube qui a son pôle à environ $\omega_0 \approx 17 \cdot 10^3$ rad.s⁻¹ ($F_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 2700$ Hz).

Les fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ sont chacune simulées par 6 pôles réels stables (sur $\mathbb{R}^-$) et les 4 autres par 6 pôles réels stables et 2 paires de pôles complexes conjugués. Les retards de la structure en Fig. 5 sont simulés par des retards numériques faible coût (tampons circulaires).

La figure 7 montre la réponse fréquentielle de $\mathcal{H}_l$ et de son approximation. Nous y voyons 2 “bosses” qui correspondent aux 2 premières résonances du tronçon qui n'ont pas été simulées par la boucle du système.

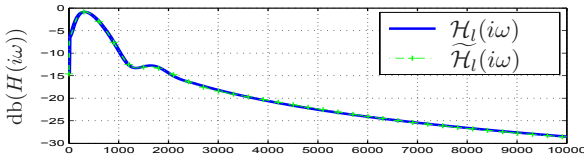


FIGURE 7 – $\mathcal{H}_l$ et son approximation $\widetilde{\mathcal{H}}_l$.

Le résultat de la simulation est illustrée en Fig. 8 par la réponse en fréquence de la fonction de transfert globale R_g^r et de sa version simulée $\widetilde{R}_g^r$. Notons que l'erreur maximale est d'environ 1.9 dB, et son erreur moyenne de 0.3 dB.

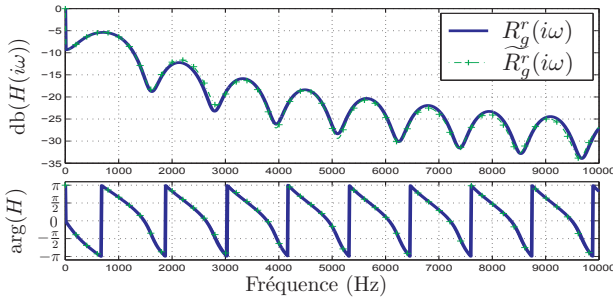


FIGURE 8 – R_g^r et sa version simulée $\widetilde{R}_g^r$.

6 Conclusion

Dans ce document, nous avons vu que pour des tubes convexes l'utilisation de l'approche des guides d'ondes avec la structure de simulation de [4] pose des problèmes de stabilité par la présence de singularités instables qui ne sont pas du type pôles, mais du type *coupures*. Après avoir expliqué l'origine du problème, nous avons proposé une structure généralisée qui permet de paramétrer le système par 2 degrés de liberté qui sont des fonctions de transfert. Alors en partie 5 nous avons fait un choix de fonctions qui permet de stabiliser le système et restant proche de l'approche de [4]. Ce choix nous a permis de “repousser” les singularités instables dans le demi-plan gauche de Laplace, ce qui les stabilise. Enfin, la simulation numérique a été réalisée avec 2 retards, et 6 filtres récursifs standard.

L'approche que nous avons employée ici est très empirique et nécessiterait une étude théorique plus rigoureuse. Par exemple, le choix de la transformation γ présentée ici garantit seulement que les singularités instables sont envoyées dans $\mathbb{C}_0^-$, il serait intéressant de

garantir qu'elles se retrouvent uniquement sur $\mathbb{R}^-$.

De plus seule la stabilité d'un tronçon est faite. Pour la simulation d'un tube complet, par la concaténation virtuelle de plusieurs tronçons, il est nécessaire d'étudier la stabilité de l'ensemble du système.

Références

- [1] V. Pagneux, *Propagation acoustique dans les guides à section variable et effet d'écoulement*. PhD thesis, Université du Maine, 1996.
- [2] D. P. Berners, *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*. PhD thesis, Stanford University, 1999.
- [3] J. Gilbert, J. Kergomard, and J.-D. Polack, “On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 87, no. 4, pp. 1773–1780, 1990.
- [4] T. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon, “Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations,” in *IEEE WASPAA*, (Mohonk, USA), pp. 267–270, 2007.
- [5] J. O. Smith, “Music applications of digital waveguides,” Tech. Rep. STAN-M-39, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Department of Music, Stanford University, 1987.
- [6] A. Webster, “Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph,” *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, vol. 5, pp. 275–282, 1919.
- [7] J.-D. Polack, “Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process,” *J. Acoustique*, vol. 4, pp. 47–67, February 1991.
- [8] T. Hélie, “Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114, pp. 2633–2647, 2003.
- [9] J. D. Markel and A. H. Gray, “On autocorrelation equations as applied to speech analysis,” *IEEE Trans. Audio and Electroac.*, vol. 21, April 1973.
- [10] T. Hélie, *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. PhD thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002.
- [11] A. A. Lokshin and V. E. Rok, “Fundamental solutions of the wave equation with retarded time,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 239, 1978.
- [12] G. Montseny, “Diffusive representation of pseudo-differential time-operators,” *ESAIM : Proc.*, vol. 5, pp. 159–175, 1998.
- [13] T. Hélie, D. Matignon, and R. Mignot, “Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : Towards efficient real-time simulation,” in *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO'06)*, (Cachan, France), 2006. 6 pages.
- [14] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon, “On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds,” in *IFAC Fractional Differentiation and its Applications*, (Ankara, Turkey), 2008. 6 pages.