

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Modèle Faible Mach et simulations numériques 2D de l'amplification d'onde thermoacoustique

C. Weisman^{1,2}, D. Baltean-Carlès^{1,2}, P. Le Quéré¹, L. Bauwens³

¹ LIMSI-CNRS, BP133 91403 Orsay Cedex, {weisman,baltean,plq}@limsi.fr

² Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

³ University of Calgary, Dept of Mechanical and Manufacturing Eng., AB AB T2N 1N4 Calgary, Canada, bauwens@ucalgary.ca

Les phénomènes locaux de conversion d'énergie thermique en énergie acoustique propagée le long de tubes résonants sont au cœur de la conception des machines thermoacoustiques. Dans ce travail, on étudie l'amplification d'onde par effet thermoacoustique avec un modèle faible Mach pour la description de l'écoulement à la fois au sein de la cellule active thermoacoustique (stack + échangeurs de chaleur), et dans les deux parties de résonateur entourant cette cellule. Dans la cellule active acoustiquement compacte, l'écoulement obtenu est compressible, visqueux, et conducteur de chaleur. Dans les résonateurs on obtient un modèle d'acoustique linéaire. La résolution s'effectue dans le cas particulier des systèmes à géométrie linéaire comprenant un stack formé d'un empilement de plaques conductrices parallèles à la direction de propagation. La partie numérique concerne la résolution des équations instationnaires dans un espace bidimensionnel interplaques prenant en compte le couplage avec l'acoustique résonante, elle-même résolue de façon analytique par la méthode des caractéristiques. On simule ainsi le démarrage et la saturation d'un moteur thermoacoustique. Le phénomène d'amplification est fonction entre autres du champ de température initial dans la cellule active et de la charge imposée à l'extrémité du résonateur en sortie de moteur. Suivant les conditions de l'expérience simulée, plusieurs modes résonants sont instables. On montre également que pour des conditions identiques en température, pression, géométrie, le déclenchement est retardé si on initialise le calcul par la solution 2D de conduction stationnaire par rapport à une répartition initiale linéaire de température. D'autre part, le transitoire menant à la saturation est différent pour les deux cas : si la répartition initiale de température est linéaire, on obtient une bosse, liée à la superposition des phénomènes de conduction thermique et d'amplification de l'onde.

1 Introduction

Un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires est un système constitué d'un long tube résonant, fermé à une extrémité et chargé à l'autre extrémité, à l'intérieur duquel est placée la cellule active thermoacoustique. Cette dernière est composée de deux échangeurs, l'un chaud, l'autre froid, séparés par une structure poreuse ou par un empilement de plaques (stack), qui est le siège des échanges surfaciques de chaleur. Par l'intermédiaire des échangeurs, on impose une différence de température donnée entre l'entrée et la sortie de la cellule active. Lorsque cette différence de température est suffisamment importante, une instabilité thermoacoustique se déclenche, et toute perturbation initiale de pression est amplifiée.

Les études et les dimensionnements des systèmes thermoacoustiques complets s'effectuent actuellement en utilisant des modèles 1D [1, 2]. Cependant, les études fines des échanges dans la cellule active requièrent l'usage de modèles multidimensionnels, à cause des couplages étroits entre les champs aérodynamiques et thermiques. Plusieurs études récentes ont été consacrées à la modélisation des échangeurs et à l'étude des effets de bords thermiques, en particulier dans les régions entre le stack et les échangeurs. Dans l'étude présentée

ici, le stack est constitué de plaques planes horizontales conductrices. Pour des raisons technologiques pratiques, les échangeurs ne sont pas complètement collés au stack, et il existe donc un petit espace fluide entre les plaques et les échangeurs. Un des intérêts des études multi-dimensionnelles est l'analyse des effets de cet espace, et plus généralement l'influence de la géométrie des échangeurs sur le démarrage et le fonctionnement des moteurs thermoacoustiques.

Les rares travaux de simulations 2D existant dans la littérature ont été effectués avec des codes commerciaux [3, 4], et chaque simulation requiert un temps de calcul très long. Dans cette étude, on simplifie les équations de Navier-Stokes à l'aide d'une approximation faible nombre de Mach. Cette analyse asymptotique est réalisée à la fois dans la cellule active et dans les résonateurs. Le couplage avec les parties gauche et droite du tube (les résonateurs) est réalisé au moyen d'une analyse multi-échelles avec développements asymptotiques raccordés [5]. On obtient dans les résonateurs une loi de propagation linéaire analytique, formulée à l'aide de la méthode des caractéristiques. La mise en œuvre numérique de la résolution des équations sur la cellule active est réalisée à l'aide d'un code volumes finis, modifié afin de tenir compte, à chaque pas de temps, du couplage entre la cellule active et les résonateurs.

Dans la suite, on détaille tout d'abord le modèle développé, puis la mise en œuvre numérique et enfin les résultats correspondant à un cas expérimental décrit dans la littérature [6].

2 Modèle physique

Le dispositif expérimental simplifié que l'on cherche à modéliser est constitué d'un long résonateur, fermé à l'extrémité gauche et chargé à l'extrémité droite. La cellule active thermoacoustique est positionnée à l'intérieur du résonateur. Elle est composée de deux échangeurs, l'un chaud, l'autre froid, séparés par un empilement de plaques (stack). Les échangeurs de chaleur sont également constitués d'empilements de plaques, avec des propriétés thermo-physiques distinctes de celles des plaques du stack, un espace inter-plaques et une longueur également différentes. La géométrie du système est présentée sur la figure 1.

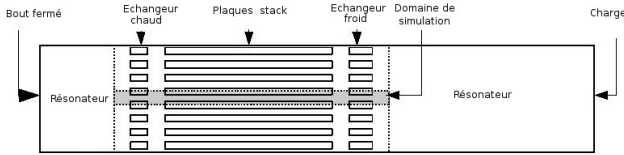


FIG. 1: géométrie du moteur simplifié

La première étape de développement du modèle consiste à définir des grandeurs de référence. Le fluide est initialement au repos, à pression et température constantes, la température étant égale à celle de l'échangeur froid. On choisit cet état comme état de référence, ce qui fixe la température $\tilde{T}_{ref}$ égale à la température froide, et la pression de référence $\tilde{P}_{ref}$. Toutes les propriétés thermophysiques du fluide seront référencées par rapport à cet état.

Bien que la présence de la charge stipule que l'une des extrémités du résonateur se déplace, l'amplitude de ce déplacement reste faible tant que la vitesse du fluide reste petite. Ainsi on introduit la longueur de référence comme étant la longueur du résonateur $\tilde{L}_{res}$. On introduit ensuite une échelle de temps acoustique,

$$\tilde{t}_{ref} = \frac{\tilde{L}_{res}}{\tilde{c}_{ref}}, \quad (1)$$

où c_{ref} est la vitesse du son du fluide à la température de référence. $\tilde{t}_{ref}$ représente la demi-période acoustique du résonateur non chargé (deux extrémités fermées), sans cellule active, et rempli de fluide à la température froide.

La vitesse initiale du fluide n'est pas significative. Par contre, lorsque le moteur fonctionne en régime établi et est correctement chargé, la distance balayée par le fluide en mouvement est de l'ordre de la longueur du stack. Ceci nous permet d'introduire une vitesse de référence $\tilde{U}_{ref} = \tilde{L}_{stack}/\tilde{t}_{ref}$. Avec cette vitesse maximale on introduit un nombre de Mach de référence

$$M = \frac{\tilde{U}_{ref}}{\tilde{c}_{ref}} = \frac{\tilde{L}_{stack}}{\tilde{L}_{res}} \quad (2)$$

La cellule active thermoacoustique est supposée acoustiquement compacte c'est à dire que sa longueur caractéristique est petite comparée à la longueur du résonateur. En prenant pour cette longueur caractéristique la longueur du stack $\tilde{L}_{stack}$, on a donc $\tilde{L}_{stack} \ll \tilde{L}_{res}$. De cette hypothèse on déduit que le nombre de Mach est très petit devant 1. Il sera le petit paramètre du problème qui permettra d'effectuer une analyse asymptotique :

$$M = \frac{\tilde{U}_{ref}}{\tilde{c}_{ref}} \ll 1 \quad (3)$$

Toutes les variables du problème sont uniformément adimensionnées dans tout le domaine sauf la coordonnée longitudinale $\tilde{x}$. En effet, pour pouvoir modéliser à la fois les échanges fins à l'intérieur de la cellule active et la propagation acoustique dans le résonateur on est amené à introduire deux échelles spatiales caractéristiques et à faire deux adimensionnements de la longueur : par $\tilde{L}_{stack}$ dans la cellule active et $\tilde{L}_{res}$ dans le résonateur.

2.1 Résonateur

Dans les deux parties du résonateur, le diamètre étant très grand devant l'épaisseur de couche limite visqueuse l'écoulement est unidimensionnel, non visqueux, isentropique, donc gouverné par les équations adimensionnées :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + M \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$M \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + o(M) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + o(M) = o(M) \quad (6)$$

$$p = \rho T \quad (7)$$

γ étant la rapport des chaleurs spécifiques. En effectuant un développement asymptotique des variables sans dimension u , T , p et ρ , en fonction du nombre de Mach de la forme :

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + o(M) \quad (8)$$

on obtient au premier ordre d'approximation les équations de l'acoustique linéaire non-dissipative pour un gaz parfait sous la forme :

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{T^{(0)}}{\gamma} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$p^{(0)} = 1, \quad \rho^{(0)} = \frac{1}{T^{(0)}} \quad (11)$$

La température $T^{(0)}$ prend des valeurs constantes différentes de chaque côté de la cellule active, $T^{(0)} = \tilde{T}_{chaud}/\tilde{T}_{ref} = T_c$ du côté gauche et $T^{(0)} = 1$ du côté droit. On résout ces dernières équations par la méthode des caractéristiques, en utilisant les variables de Riemann $\mathcal{L} = \gamma u^{(0)} - \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)}$ et $\mathcal{R} = \gamma u^{(0)} + \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)}$ qui sont constantes sur les caractéristiques se déplaçant

à la vitesse du son (égale à $\sqrt{T^{(0)}}$) à gauche, respectivement à droite de la cellule active. En partant d'un point quelconque d'espace-temps (x_0, t_0)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x_0 - \sqrt{T^{(0)}}(t - t_0), t] &= \mathcal{L}(x_0, t_0) \\ \mathcal{R}[x_0 + \sqrt{T^{(0)}}(t - t_0), t] &= \mathcal{R}(x_0, t_0)\end{aligned}\quad (12)$$

On choisit un repère dans le résonateur tel que la position de la cellule active soit caractérisée par $x = 0$. A l'extrémité fermée, placée en $x_L = -l_L$ la vitesse est $u^{(0)} = 0$. Etant donné que $\mathcal{L} + \mathcal{R} = 2\gamma u^{(0)}$, la variable $\mathcal{R}$ sera déterminée par la condition de réflexion $\mathcal{R}(x_L, t) = -\mathcal{L}(x_L, t)$. De même, en utilisant les relations (12) on trouve la condition limite en $x = 0^-$ (position de la cellule active du côté gauche du résonateur) :

$$\mathcal{R}(0^-, t) = -\mathcal{L}[0^-, t - 2l_L/\sqrt{T^{(0)}}] \quad (13)$$

A l'extrémité droite du tube est placée une charge en $x_R = l_R + \mathcal{O}(M)$ car le déplacement de cette extrémité sera considéré de l'ordre de Mach. La charge sera modélisée par une relation de type $F[\tilde{u}_R(\tilde{x}_R), \tilde{p}_R(\tilde{x}_R)] = 0$. En simplifiant cette relation avec l'idée que la charge est placée en $x_R = 0^+ + l_R$, $x = 0^+$ étant la position de la cellule active du côté droit du résonateur, on peut décrire la charge en ce point par une impédance f telle que $p^{(1)}(x_R, t) = f u^{(0)}(x_R, t)$. En résolvant de nouveau au long des caractéristiques, compte-tenu des relations $\mathcal{L} + \mathcal{R} = 2\gamma u^{(0)}$ et $\mathcal{L} - \mathcal{R} = -2\sqrt{T^{(0)}}p^{(1)}$ on trouve une condition limite en $x = 0^+$:

$$\mathcal{L}(0^+, t) = \mathcal{Z}\mathcal{R}[0^+, t - 2l_R/\sqrt{T^{(0)}}] \quad (14)$$

avec

$$\mathcal{Z} = \frac{\gamma - f\sqrt{T^{(0)}}}{\gamma + f\sqrt{T^{(0)}}}$$

Une extrémité fermée correspond à $f \rightarrow \infty$ et implique $\mathcal{Z} = -1$, tandis qu'une extrémité ouverte correspond à $f = 0$ et par la suite $\mathcal{Z} = 1$. Les deux cas se traduisent par une charge nulle.

2.2 Cellule active

Dans la cellule active le problème nécessite une solution numérique. Tout d'abord, on établit un modèle simplifié. L'espacement entre les plaques du stack et des échangeurs, ainsi que l'espace entre le stack et les échangeurs étant du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche limite visqueuse et thermique, on part des équations de Navier-Stokes compressibles et de la loi d'état des gaz parfaits pour le domaine fluide, ainsi que de l'équation de conduction instationnaire dans le stack et échangeurs. Utilisant les grandeurs de référence définies précédemment avec la différence que la longueur de référence est $\tilde{L}_{stack}$, on obtient les équations adimensionnées suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\frac{1}{\gamma M^2} \nabla p + \frac{\rho e_z}{F_r} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right] &= \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (k \nabla T) + \\ &+ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right] + (\gamma - 1) \frac{\phi}{Re}\end{aligned}\quad (17)$$

$$p = \rho T \quad (18)$$

où $\tau = \mu[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})I]$, $\phi = \tau :: \nabla \vec{u}$, $Re = \tilde{\rho} \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{stack} / \tilde{\mu}$ est le nombre de Renoylds de référence basé sur l'état de référence thermodynamique, $F_r = \tilde{U}_{ref}^2 / (g \tilde{L}_{stack})$ est le nombre de Froude de référence et $Pe = \tilde{\rho}_f C_p \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{stack} / \tilde{k}_f$, le nombre de Péclet de référence. Dans la suite k et μ seront prises constantes. On effectue un développement asymptotique au second ordre des variables, $\vec{u}$, p , T , ρ , de la forme :

$$p = p^{(0)} + M p^{(1)} + M^2 p^{(2)} + o(M^2) \quad (19)$$

En injectant dans les équations ci-dessus et en négligeant la gravité, on obtient les équations de l'approximation faible nombre de Mach. L'approximation obtenue est la même que celle développée dans [7, 8], avec une différence : la pression à l'ordre dominant varie seulement en temps $p^{(0)} = p^{(0)}(t)$ ($\nabla p^{(0)} = 0$) et comme elle doit être raccordée avec la pression dans le résonateur, alors $p^{(0)} = 1$ et donc reste constante (le modèle acoustique dans le résonateur produit des oscillations de pression seulement à l'ordre M). Ensuite, de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement à l'ordre M , on déduit que $p^{(1)} = p^{(1)}(t)$, mais n'intervient plus dans les équations qui sont écrites à l'ordre dominant. Par contre, comme les températures au premier ordre sont différentes de part et d'autre des deux échangeurs de chaleur, on aura des variations de température et masse volumique au premier ordre d'approximation dans la cellule active. Au final, les équations sans dimension sont :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{u}^{(0)}) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial(\rho^{(0)} \vec{u}^{(0)})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{u}^{(0)} \otimes \vec{u}^{(0)}) = -\nabla p^{(2)} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau \quad (21)$$

$$\rho^{(0)} \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + (\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla) T^{(0)} \right] = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T^{(0)} \quad (22)$$

$$p^{(0)} = 1 = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (23)$$

Dans les plaques solides (stack), l'équation de conduction de la chaleur adimensionnée est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pe_s} \Delta T, \quad (24)$$

où le nombre de Péclet solide est défini par $Pe_s = Pe \alpha_{ref} / \alpha_s$, α_{ref} et α_s étant la diffusivité thermique à l'état de référence respectivement dans le fluide et dans le solide, la valeur du nombre de Péclet solide dépendant du solide considéré (stack ou échangeur).

Les conditions aux limites imposées sont :

- sur les frontières horizontales, qui sont des lignes de symétrie à cause de la périodicité du domaine : conditions adiabatiques pour la température et annulation de la composante normale de la vitesse,
- à l'interface solide/fluide (plaques du stack et échangeurs) on impose la continuité de la température et du flux de chaleur, ainsi que des conditions d'adhérence pour la vitesse,
- sur les échangeurs la température est fixe et imposée chaude du côté échangeur chaud et froide du côté échangeur froid.
- sur les frontières verticales, entre la cellule active et le résonateur s'effectue le couplage avec l'acoustique dans le résonateur, dans la limite où $\tilde{L}_{stack} / \tilde{L}_{res} \rightarrow 0$.

2.3 Raccordement

Dans le modèle (acoustique) du résonateur, en variable adimensionnée extérieure $x = \tilde{x}/\tilde{L}_{res}$, le stack et les échangeurs de chaleur ont une longueur négligeable et la cellule active est repérée par 0^- ou 0^+ selon qu'on s'approche du côté gauche ou droit; dans le modèle (faible Mach) de la cellule active, en variable adimensionnée intérieure $x = \tilde{x}/\tilde{L}_{stack}$, le résonateur a une longueur qui tend vers ∞ et donc les extrémités gauche et droite de la cellule active sont situées respectivement à $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow \infty$. En raccordant les deux solutions, on obtient tout d'abord que la vitesse, la température et la pression doivent approcher la même valeur en ces points pour les deux solutions. On obtient donc :

$$\begin{aligned} p^{(1)}(0^-) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} p^{(1)} = p^{(1)}(0) \\ p^{(1)}(0^+) &= \lim_{x \rightarrow \infty} p^{(1)} = p^{(1)}(0) \\ T^{(0)}(0^-) &= T_c = \lim_{x \rightarrow -\infty} T^{(0)} \\ T^{(0)}(0^+) &= 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} T^{(0)} \end{aligned} \quad (25)$$

Pour $x \rightarrow -\infty$, la vitesse longitudinale et la pression acoustique vérifient l'équation (13), tandis que pour $x \rightarrow \infty$ les deux inconnues vérifient (14). Enfin, les vitesses transversales s'annulent pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Ensuite, en intégrant l'équation de l'énergie sur le domaine occupé par la cellule active, avec des conditions adiabatiques sur les bords et avec l'équation de continuité, on obtient :

$$(u^{(0)}(0^-) - u^{(0)}(0^+))H + \frac{1}{Pe} \int \nabla T^{(0)} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (26)$$

où H est la hauteur adimensionnée. Ceci montre que la cellule active, tout en étant transparente à la pression acoustique, se comporte comme une source de vitesse dans l'acoustique, couplant ainsi les problèmes intérieur et extérieur.

Comme nous sommes en présence d'un problème d'instabilité, une perturbation doit être introduite comme condition initiale. C'est aussi un problème de seuil pour le gradient de température le long du stack. Ainsi si le fluide était au départ au repos, il le sera tant qu'on a une solution de conduction stationnaire dans tout le domaine. De ce fait on part de la solution stationnaire de conduction dans la cellule active. Une perturbation de type bruit aléatoire est introduite comme perturbation initiale pour la pression et on part d'un fluide au repos.

3 Solution Numérique

Le domaine de simulation, réduit à une tranche de la cellule active, comprise entre deux demi-plaques de stack successives, est représenté sur la Figure 1.

La solution numérique utilise un code volumes finis, développé initialement pour la simulation directe de la convection non-Boussinesq [9]. Le traitement des termes diffusifs est implicite, tandis que la convection est explicite. L'algorithme est d'ordre 2 en espace et en temps. Un maillage décalé est utilisé, avec des vitesses définies sur les faces des cellules tandis que toutes les variables d'état sont définies au centre des cellules. Pour assurer la

continuité, l'algorithme utilise une méthode à pas fractionnaire dérivée de la méthode de projection utilisée pour les écoulements incompressibles adaptée pour des densités variables.

Les équations d'Helmoltz obtenues pour la température et les composantes de la vitesse sont résolues par deux algorithmes : ADI et GMRES. L'équation pour la correction de pression dynamique est résolue avec une méthode multi-grilles.

La présence du stack et des échangeurs est traitée avec une variable de phase qui fait la différence entre le solide et le fluide et assure la continuité de la température et du flux de chaleur aux interfaces solide/fluide.

A chaque pas de temps, la propagation acoustique dans le résonateur fournit des deux côtés de la cellule active des relations entre la vitesse et la pression acoustique. L'équation (26) constitue la troisième relation qui complète les conditions nécessaires en vitesse. Les trois variables (vitesse à gauche et à droite de la cellule active et pression acoustique), obtenues en résolvant ces trois équations sont également gardées pour les besoins de simulation ultérieure, ce qui constitue une discrétisation temporelle de la solution analytique dans les résonateurs.

Les simulations numériques sont effectuées en deux parties : d'abord, la distribution de température de l'état stationnaire est calculée en résolvant un problème de conduction de la chaleur. Ensuite, ce champ de température est utilisé comme condition initiale pour le déclenchement (ou non) de l'instabilité.

4 Résultats

Les résultats correspondent aux expériences de Atchley [10]. Le résonateur est un tube de 1 m de longueur, contenant de l'hélium sous pression, la pression variant de 1 à 5 MPa, à la température froide (ambiante) égale à 293K. La longueur du stack, composé de plaques en inox, est de 3.5 cm, c'est à dire telle que $\tilde{L}_{res} = 28.6\tilde{L}_{stack}$. Ceci correspond à un nombre de Mach de référence $M = 0.035$. L'épaisseur des plaques est $0.008\tilde{L}_{stack}$ et l'espacement interplaques est $0.022\tilde{L}_{stack}$. Les échangeurs sont constitués de plaques en nickel. Le nombre de plaques constituant les échangeurs et leur épaisseur sont distincts des caractéristiques du stack, de telle sorte que des valeurs moyennes sont calculées pour une représentation dans la tranche de cellule active étudiée. L'épaisseur des plaques des échangeurs est de $0.009\tilde{L}_{stack}$ en moyenne, l'espacement interplaques étant de $0.021\tilde{L}_{stack}$. La longueur de l'échangeur chaud est $0.21\tilde{L}_{stack}$, celle de l'échangeur froid est $0.63\tilde{L}_{stack}$. La distance entre les échangeurs et le stack est choisie égale à un espace interplaques du stack.

Le maillage utilisé pour les simulations est 512×32 . Pour la phase initiale d'amplification, on a utilisé des pas de temps de environ $1/100^{eme}$ de la période. Lorsque les vitesses augmentent, on est amené à réduire le pas de temps jusqu'à un facteur 10. Avec ces paramètres, on a montré que la convergence des solutions est bonne. Une simulation de l'ensemble de la phase d'amplification jusqu'à saturation de l'onde prend environ 30 heures sur

une NEC SX8, ce qui est important. En moyenne 3 à 4 cycles de multigrille sont nécessaires à chaque pas de temps. L'algorithme ADI donne des résultats identiques, pour de petits pas de temps, à ceux obtenus par l'algorithme GMRES, et comme la mise en œuvre de GMRES est plus lourde et plus longue, l'algorithme ADI a été retenu pour les simulations présentées ci-dessous.

4.1 Champ de température initial

Pour l'initialisation du calcul, on peut supposer que la température est chaude à gauche de l'échangeur chaud, froide à droite de l'échangeur froid, et que la distribution de température est linéaire entre les deux échangeurs de chaleur. Cette distribution correspond à l'hypothèse communément utilisée, en particulier pour les analyses 1D. Cependant, cette distribution est distincte du champ de conduction qui s'établit lors de la mise en chauffe du système. En particulier, on s'attend à avoir une solution multi-dimensionnelle au niveau de l'espace fluide entre le stack et les échangeurs. La so-

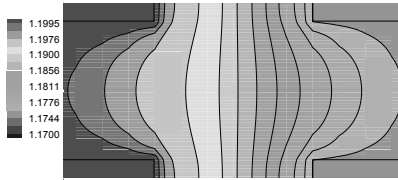


FIG. 2: détail du champ de température de conduction entre le stack et l'échangeur chaud

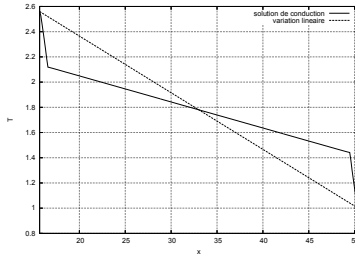


FIG. 3: profil de température le long d'une ligne horizontale en bord de plaque, entre les deux échangeurs

lution de conduction a été calculée en utilisant l'algorithme de discrétisation de l'équation de l'énergie du programme général, mais en adimensionnant le temps par le temps caractéristique de conduction dans le fluide. Sur la majeure partie de la cellule active, le champ de température est essentiellement 1D. La figure 2 montre que la solution est bien bidimensionnelle au niveau des zones entre les échangeurs et le stack. La figure 3 montre le profil de température entre les échangeurs, le long d'une ligne horizontale passant en bord de plaque. La présence de la zone fluide, très faiblement conductrice, réduit considérablement la différence de température aux bornes du stack. Ceci a des conséquences importantes sur le déclenchement de l'amplification thermoacoustique, étudié dans le paragraphe suivant.

4.2 Phase initiale d'amplification

Plusieurs simulations de la phase initiale d'amplification sont représentées sur les figures 4, 5, et 6 correspondant à trois valeurs de la pression moyenne, $\tilde{P}_{ref}$. Pour ces simulations, la température de l'échangeur a été fixée telle que la différence de température imposée soit de $450K$. Le champ de température initial est le champ de conduction calculé dans la section précédente. On a fait varier la charge f de façon à bien observer

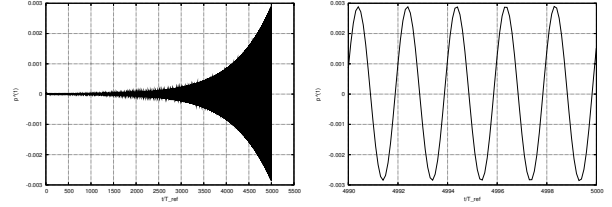


FIG. 4: $\tilde{P}_{ref} = 440kPa$, variation temporelle de la pression totale (détail sur la figure de droite)

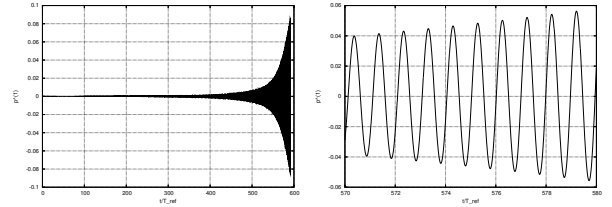


FIG. 5: $\tilde{P}_{ref} = 150kPa$, variation temporelle de la pression totale (détail sur la figure de droite)

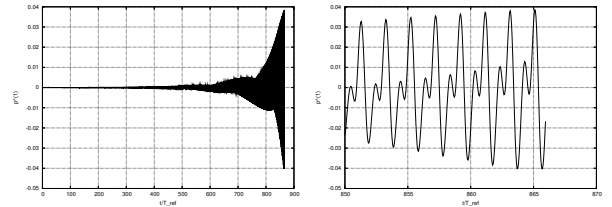


FIG. 6: $\tilde{P}_{ref} = 240kPa$, variation temporelle de la pression totale (détail sur la figure de droite)

la phase d'amplification. Lorsque la valeur de f est trop importante (ce qui correspond à un tube fermé aux deux extrémités sans charge), le signal est amplifié très rapidement. Pour observer la suite du signal, il est alors nécessaire de réduire considérablement le pas de temps, et les vitesses atteignent des niveaux non physiques. En pratique, on choisit une valeur de f qui permet d'observer l'amplification du signal, et telle que l'amplification ne soit pas trop importante.

Les résultats des simulations ont été comparés avec ceux de [10] par comparaison avec les courbes marginales, donnant le seuil des instabilités en fonction de la différence de température imposée le long du stack et de la pression moyenne du fluide. Sur ces courbes marginales théoriques, tracées pour les deux premiers modes, il apparaît plusieurs zones. Dans la région I (forte pression moyenne) seul le mode 1 (fondamental) est instable,

dans la région II (faible pression moyenne), seul le mode 2 (premier harmonique) est instable, tandis que dans la région III (pression moyenne intermédiaire) les modes 1 et 2 coexistent.

La figure 4 (gauche) montre l'évolution de la pression totale en fonction du temps pour une forte pression moyenne (440 kPa, la valeur de f adimensionnée choisie est $f = 39$). Le détail (figure de droite) de la fin de la simulation montre que la période apparente est de 2, ce qui correspond au mode 1 (fondamental), en accord avec les résultats de [10].

La figure 5 correspond à la pression moyenne faible (150 kPa, $f = 17$). Sur le détail (figure 5 (droite)) de la fin de la simulation, on voit que c'est le deuxième mode qui est instable (période apparente proche de 1, ce qui identifie le premier harmonique), en accord avec les résultats de [10].

Sur la figure 6 correspondant à la pression moyenne 240 kPa ($f = 28$), on voit que les modes 1 et 2 sont instables, ce qui correspond au cas de la zone III des résultats de [10]. Les résultats des simulations sont donc en accord avec ceux de [10] sur la sélection des modes instables dans les trois zones délimitées par les courbes marginales.

4.3 Saturation

Les calculs peuvent être poursuivis jusqu'à obtenir la saturation de l'onde (voir la figure 7 montrant un exemple de calcul complet). Pour des conditions identiques en pression et géométrie, le déclenchement est retardé si on initialise le calcul par la solution 2D de conduction stationnaire, par comparaison avec ce qui se produit lorsque la répartition initiale de la température est linéaire.

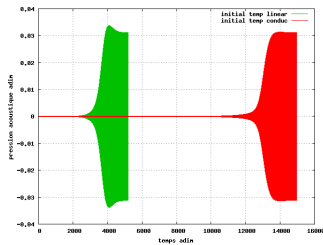


FIG. 7: Variation temporelle de la pression totale jusqu'à saturation (répartition initiale linéaire de la température courbe de gauche, champ de conduction initiale courbe de droite)

D'autre part, le transitoire menant à la saturation est différent pour les deux cas. Dans le cas de solution initiale linéaire, on obtient une bosse, liée à la superposition des phénomènes de conduction thermique dans le stack et d'amplification de l'onde. Cette bosse disparaît dans l'autre cas de condition initiale.

5 Conclusion

Un modèle faible Mach a été développé pour l'étude de l'amplification d'onde par effet thermoacoustique. Ce modèle considère l'écoulement à la fois au sein de la cellule active thermoacoustique (stack et échangeurs de

chaleur), et dans les deux parties de résonateur entourant cette cellule. Les simulations numériques ont été réalisées sur une tranche bidimensionnelle de la cellule active bornée par deux demi-plaques de stack. Le couplage avec une solution analytique de l'acoustique résonante intervient au niveau des conditions de vitesse en entrée et sortie du domaine. On a ainsi pu simuler le démarrage et la saturation d'un moteur thermoacoustique. Suivant les conditions de l'expérience simulée, plusieurs modes résonants sont instables, ce qui est cohérent avec les résultats de l'expérience de référence. Le déclenchement de l'amplification est fonction de la répartition initiale du champ de température, qui dépend de la géométrie des échangeurs.

Remerciements

Cette étude a reçu le soutien du Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (LB). Les simulations numériques ont été effectuées sur la NEC-SX8 de l'IDRIS-CNRS, projet No. i2009020599.

Références

- [1] N. Rott, "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes", *Z. Angew. Math. Phys.*, 230-243, (1969).
- [2] G. W. Swift, "Thermoacoustic engines", *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1145-1180 (1988).
- [3] J. A. Lycklama à Nijeholt, M. E. H. Tijani and S. Spoelstra, Simulation of a traveling-wave thermoacoustic engine using Computational Fluid Dynamics, *J. Acoust. Soc. Am.* 118 (2005) 2265-2270.
- [4] G. Y. Yu, E. C. Luo, W. Dai, J. Y. Hu, Study of nonlinear processes of a large experimental thermoacoustic-Stirling heat engine by using computational fluid dynamics, *J. Appl. Phys.* 102 (2007) 074901-074907.
- [5] O. Hireche, C. Weisman, D. Baltean Carlès, P. Le Quéré and L. Bauwens, "Analysis and Simulation of Thermoacoustic Engine", *Comptes Rendus (Mécanique)*, 338, 18-23(2010).
- [6] A. A. Atchley, H. E. Bass, T. J. Hofer and H. T. Lin, "Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation", *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 734-743 (1992).
- [7] L. Bauwens, Oscillating flow of a heat-conducting fluid in a narrow tube, *J. Fluid Mech.* 324 (1996) 135-161.
- [8] S. Paolucci, On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations, Sandia National Laboratories report SAND82-8257 1982.
- [9] P. Le Quéré, R. Masson, and P. Perrot, "Chebyshev collocation algorithm for 2D non Boussinesq convection", *J. Comp. physics*, vol. **103**, No2, (1992).
- [10] A.A. Atchley and F. M. Kuo, "Stability curves for a thermoacoustic prime mover", *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 1401-1404 (1994).