

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Identification des modes propres d'un caisson acoustique par sous-espaces

Joseph Lardies

Université de Franche-Comté, Institut FEMTO-ST, DMA, UMR CNRS 6174
24 rue de l'Épithaphe, 25000 Besançon, joseph.lardies@univ-fcomte.fr

On se propose de déterminer les fréquences de résonance d'un caisson acoustique de forme parallélépipédique. Le caisson est excité par un bruit blanc provenant d'un haut parleur placé à l'intérieur. Un microphone, situé aussi à l'intérieur, nous fournit la réponse temporelle du caisson excité. Nous utilisons uniquement les signaux temporels provenant du microphone pour identifier les fréquences de résonance du caisson. L'équation de propagation se met sous la forme d'une équation d'état dans laquelle la matrice de transition contient toute l'information modale. Deux méthodes sous-espaces sont présentées pour déterminer cette matrice de transition. La première méthode consiste à utiliser la matrice d'observabilité des signaux issus du microphone. En exploitant les propriétés de décalage d'une ligne de cette matrice d'observabilité nous estimons la matrice de transition. La deuxième méthode consiste à utiliser la matrice de Hankel formée avec les covariances des signaux. En utilisant les propriétés de décalage d'une ligne de cette matrice de Hankel nous pouvons estimer la matrice de transition. On montre dans la communication que ces deux méthodes sont équivalentes et conduisent par conséquent à l'identification des mêmes paramètres modaux. Des résultats provenant d'un test numérique et des résultats expérimentaux qui utilisent les signaux d'un caisson acoustique sont présentés. On montre que des fréquences de résonance qui ne sont pas identifiées par la Transformée de Fourier sont bien observées par la méthode utilisant les sous-espaces.

1 Introduction

Depuis environ deux décennies un effort de recherche constant est réalisé sur les techniques de contrôle actif et de réduction du bruit dans les caissons et conduits acoustiques tels que les gaines de ventilation. Le bruit est une fluctuation de pression acoustique et si une source sonore auxiliaire émet une onde de même amplitude et de même fréquence mais en opposition de phase avec le bruit indésirable les deux champs de pression se superposent et on obtient alors une réduction du bruit. Dans cette communication on se propose de déterminer les fréquences de résonance d'un caisson acoustique à partir des données temporelles provenant d'un microphone situé à l'intérieur du caisson. Une étude précédente a utilisé la transformée en ondelettes pour identifier les fréquences de résonance d'un caisson acoustique [1,2]. Connaissant ces fréquences propres un contrôle du bruit pourra par la suite être effectué. Le caisson est excité par un haut parleur émettant un bruit à large bande et les fréquences de résonance sont obtenues en utilisant la technique des sous-espaces. Deux méthodes sous-espaces sont présentées. La première méthode consiste à utiliser la matrice d'observabilité formée avec les signaux provenant du microphone et à exploiter les propriétés relatives à la suppression d'une ligne de cette matrice d'observabilité. La deuxième méthode consiste à utiliser la matrice de Hankel formée des covariances des signaux issus du microphone et à exploiter les propriétés de suppression d'une ligne de cette matrice de Hankel. On montre que ces deux méthodes sont équivalentes et conduisent par conséquent à la même identification des modes propres d'un caisson acoustique. Des résultats numériques et expérimentaux sont présentés, montrant l'efficacité de la méthode d'identification par sous-espaces par rapport à classique transformée de Fourier, dans laquelle les

fréquences propres sont obtenues par inspection des pics de résonance.

2 Modèle espace d'état

On considère la propagation en ondes planes et notre approche est d'utiliser le modèle espace d'état discret [3-6] dans lequel on a un système linéaire d'ordre n discrétisé dans le domaine temporel avec un pas d'échantillonnage Δt . On décrit la sortie du microphone sensibilisé par les ondes acoustiques par le système à temps discret suivant :

$$x_{k+1} = A x_k \quad (1)$$

$$y_k = C x_k + v_k \quad (2)$$

La première équation traduit la propagation des ondes et est appelée équation d'état. Le vecteur x_k est le vecteur d'état discret du processus à l'instant k . C'est un vecteur de dimension $(n \times 1)$ avec n l'ordre du processus. Dans notre cas n est le nombre de fréquences de résonance présentes dans une bande fréquentielle donnée. Dans la pratique l'ordre n est inconnu. A est la matrice de transition du système, sa taille $(n \times n)$ est égale à la dimension de l'état. L'information sur les fréquences de résonance est contenue dans la matrice de transition et l'identification de ces fréquences est ramenée à un problème de réalisation [3,4]. Notre but sera de déterminer cette matrice de transition. La deuxième équation traduit l'observation du processus et est appelée équation d'observation. La sortie du microphone à l'instant k est la grandeur scalaire y_k et est reliée au vecteur d'état par la matrice d'observation C $(1 \times n)$ et v_k est un bruit de mesure additif.

La matrice de transition A contient toute l'information modale: ses valeurs propres sont reliées directement aux modes propres que l'on souhaite identifier (fréquences de résonance et coefficients d'atténuation de l'onde). La diagonalisation de la matrice de transition A conduit à $A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$, où Ψ est la matrice (nxn) des vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, la matrice diagonale (nxn) des valeurs propres qui sont complexes conjuguées. Les fréquences propres (ou fréquences de résonance) f_i sont alors obtenues à partir de la relation [5,6] :

$$f_i = \frac{1}{2\pi \Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}{4} + [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*})]^2} \quad (3)$$

Les coefficients d'atténuation (ou d'amortissement) de l'onde sonore sont obtenus à partir la relation :

$$\xi_i = \frac{\sqrt{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}}{\sqrt{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2 + 4 [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*})]^2}} \quad (4)$$

Notre but est donc de déterminer la matrice de transition A. Pour cela deux méthodes, qui sont en fait équivalentes, vont être proposées.

3 Estimation de la matrice de transition A

3.1 Estimation de la matrice de transition par suppression d'une ligne de la matrice d'observabilité

On définit le vecteur futur des observations (px1) [3] par $y_k^+ = [y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+p-1}]^T$ et le vecteur passé des observations (px1) $y_{k-1}^- = [y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}]^T$, où le symbole T indique le transposé. La sortie temporelle discrète du microphone étant modélisée par le système linéaire (1)–(2), la covariance du processus $\{y_k\}$ est alors $R_i = E[y_{k+i}y_k] = CA^iG$ où E est l'opérateur espérance mathématique et $G = E[x_{k+1}y_k]$ le vecteur covariance de l'état et du signal observé. En considérant le vecteur passé des observations y_{k-1}^- et le vecteur futur des observations y_k^+ , on construit la matrice de Hankel de dimension (pxp) [3-6] :

$$H = E(y_k^+ y_{k-1}^{-T}) = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_p \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{2p-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$H = \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{p-1}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & \dots & CA^{2p-2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G]$$

$$H = O K \quad (6)$$

où la matrice $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}$ de dimension (pxn) est la matrice

d'observabilité [3-6] et $K = [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G]$ (nxp) est la

matrice contrôlabilité [3-6]. Pour déterminer la matrice de transition A on définit les matrices O_1 et O_2 de dimension (p-1)xn obtenues en ôtant respectivement la dernière ligne et la première ligne de la matrice d'observabilité O :

$$O = \begin{bmatrix} O_1 \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ O_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec O_1 et O_2 les matrices obtenues en sélectionnant respectivement les (p-1) premières et les (p-1) dernières lignes de la matrice d'observabilité :

$$O_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix}; \quad O_2 = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{d'où} \quad O_2 = O_1 A \Rightarrow A = O_1^+ O_2 \quad (9)$$

avec O_1^+ le pseudo-inverse de O_1 . La connaissance de O_1 et de O_2 nous permet de déterminer la matrice de transition A.

Il s'agit donc maintenant de déterminer la matrice d'observabilité à partir des mesures, c'est-à-dire à partir de la matrice de Hankel qui est formée des covariances des données temporelles. Dans la pratique, la détermination de cette matrice d'observabilité, et donc des matrices O_1 et O_2 , s'effectue par décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel H , en ne retenant que les n valeurs singulières les plus importantes et les vecteurs singuliers associés [3,4] :

$$H = U S V^T = O K \quad (10)$$

avec U (pxn), V (pxn) matrices des vecteurs singuliers et S (nxn) matrice diagonale des valeurs singulières. Par identification nous considérons $O = U$ et nous effectuons la partition suivante :

$$O = U = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{12} \end{bmatrix} \quad (11)$$

où U_{11} et U_{12} sont les matrices formées respectivement des (p-1) premières et dernières lignes de la matrice des valeurs singulières à gauche U. Nous obtenons alors les valeurs propres de la matrice de transition qui nous permettent d'identifier les modes propres du système en utilisant les relations (3) et (4) :

$$\lambda(A) = \lambda(O_1^+ O_2) = \lambda[U_{11}^+ U_{12}] \quad (12)$$

3.2 Estimation de la matrice de transition par suppression d'une ligne de la matrice de Hankel

La deuxième méthode pour déterminer la matrice de transition est d'ôter une ligne de la matrice de Hankel H. Soit la matrice H_1 de dimension (p-1)xn obtenue en ôtant la première ligne de la matrice H. Nous avons donc :

$$H_1 = \begin{bmatrix} R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_3 & R_4 & \dots & R_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{2p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ CA^2G & CA^3G & \dots & CA^{p+1}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & \dots & CA^{2p-2}G \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix} A [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] \quad (14)$$

Par conséquent $H_1 = O_1 A K$, d'où la matrice de transition

$$A = O_1^+ H_1 K^+ \quad (15)$$

Nous obtenons alors les valeurs propres de la matrice de transition

$$\lambda(A) = \lambda(O_1^+ H_1 K^+) \quad (16)$$

Nous allons montrer que les valeurs propres obtenues en utilisant la matrice de transition estimée par suppression d'une ligne de la matrice d'observabilité et la matrice de transition estimée par suppression d'une ligne de la matrice de Hankel sont identiques.

3.3 Equivalence des deux méthodes d'identification

Soit la matrice H_2 de dimension $(p-1) \times n$ obtenue en ôtant la dernière ligne de la matrice de Hankel H . Nous avons donc :

$$H_2 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_p \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p-1} & R_p & \dots & R_{2p-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{p-1}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{p-2}G & CA^{p-1}G & \dots & CA^{2p-3}G \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix} [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] = O_1 K \quad (18)$$

Par conséquent $H_2 = O_1 K = U_{11} K$ et d'autre part $H_1 = O_1 A K = O_2 K = U_{12} K$. Les valeurs propres de la matrice de transition suivant la relation (16) sont :

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(O_1^+ H_1 K^+) = \lambda(K^+ O_1^+ H_1) = \lambda(H_2^+ H_1) \\ &= \lambda[K^+ U_{11}^+ U_{12} K] = \lambda[U_{11}^+ U_{12}] \end{aligned} \quad (19)$$

ce qui correspond à la relation (12).

On a montré que l'identification des modes propres par suppression d'une ligne de la matrice d'observabilité ou bien par suppression d'une ligne de la matrice de Hankel conduit à des résultats identiques. Nous allons appliquer cette méthode sous-espaces d'identification des modes propres à deux cas. Le premier est numérique : il s'agit de déterminer les fréquences et les coefficients d'atténuation de deux ondes planes. Le deuxième est expérimental : il s'agit de déterminer les fréquences de résonance d'un caisson acoustique excité par un bruit blanc issu d'un haut parleur.

4 Applications

4.1 Cas numérique

Nous allons tester notre approche d'identification sur le cas numérique d'un signal constitué de deux ondes sinusoïdales amorties. Les deux fréquences sont très

proches : 31,83 Hz et 32,31 Hz et les coefficients d'atténuation sont respectivement 2,1% et 1,4%. La réponse temporelle d'un tel signal est présentée dans la figure 1.

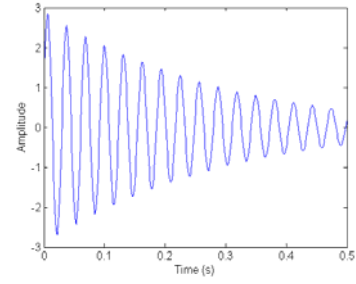


Figure 1 : Réponse temporelle du signal à analyser

Pour déterminer les deux fréquences on effectue une transformée de Fourier du signal temporel. La figure 2 nous montre réponse en fréquence du signal obtenue par transformée de Fourier.

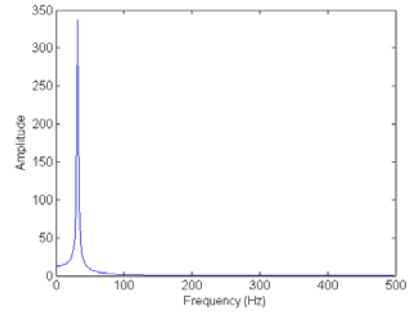


Figure 2 : Réponse fréquentielle du signal à analyser

On observe un seul pic de résonance, par conséquent la transformée de Fourier n'est pas un outil efficace lors de l'identification de modes proches. D'autre part on ne peut pas identifier les coefficients d'atténuation par transformée de Fourier.

Une fois que la matrice de transition A est déterminée par l'une des deux méthodes sous-espaces exposées dans le paragraphe 3 nous pouvons identifier les paramètres modaux. Un point important pour déterminer A est la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel H . Dans le cas général, cette matrice n'est pas exactement de rang n et donc les valeurs singulières doivent être séparées en deux familles, l'une liée aux modes physiques et l'autre liée à des modes parasites. Cette troncature est un point important et on doit utiliser des critères pour différencier les modes réels du système des modes fantômes ou parasites dus aux bruits et aux troncatures lors des calculs. Pour cela, on augmente progressivement l'ordre n du processus et on établit les diagrammes de stabilité en fréquence et en coefficient d'atténuation (ou d'amortissement). Chaque modèle correspondant à un ordre fournit un ensemble de paramètres modaux et ceux-ci sont tracés dans un diagramme appelé diagramme de stabilité. Les modes identifiés stables sont caractéristiques des modes physiques. Les fréquences et les coefficients d'amortissement correspondant à un certain ordre sont comparés avec ceux d'un ordre inférieur. Les critères de comparaison choisis afin de distinguer les modes physiques et les modes parasites sont :

$$100 \frac{f_i^{(n)} - f_i^{(n+1)}}{f_i^{(n)}} \leq 2\% \quad (20)$$

$$100 \frac{\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n+1)}}{\xi_i^{(n)}} \leq 10\% \quad (21)$$

où $f_i^{(n)}$ et $\xi_i^{(n)}$ sont respectivement la fréquence et le coefficient d'atténuation du $i^{\text{ème}}$ mode à l'ordre n .

En utilisant la technique d'identification des sous-espaces on obtient les diagrammes de stabilité en fréquence et en coefficient d'atténuation présentés dans la figure 3

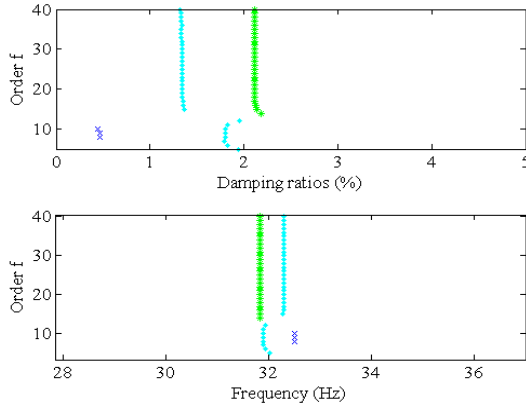


Figure 3 : Diagrammes de stabilité en fréquence et en coefficient d'atténuation

Cette figure montre que la méthode sous-espaces donne des résultats très convenables lors de l'identification de modes très proches. En effet les résultats obtenus sont $f_1=31,82$ Hz, $f_2=32,30$ Hz, $\xi_1=2,11\%$, $\xi_2=1,38\%$. Ils sont obtenus par moyennage des valeurs identifiées de l'ordre 15 à l'ordre 40.

4.2 Cas expérimental : étude d'un caisson acoustique

On considère un caisson acoustique fermé, excité par un bruit blanc grâce à un haut parleur (Figures 4 et 5). Un microphone est placé à l'intérieur du caisson. Seules les données temporelles provenant du microphone seront utilisées pour identifier les fréquences de résonance du caisson. Cette identification s'effectuera par transformée de Fourier du signal provenant du microphone puis par la méthode des sous-espaces.



Figure 4 : Caisson acoustique expérimental

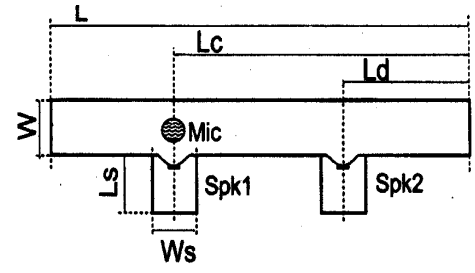


Figure 5 : Schéma du caisson acoustique

L'excitation du caisson s'effectue avec le haut parleur 1 qui génère un signal aléatoire uniformément distribué, échantillonné à la fréquence de 2 kHz et filtré numériquement avec un filtre passe-bas de Butterworth du 6^{ème} ordre. La fréquence de coupure est de 400 Hz. Par conséquent nous effectuerons l'identification des fréquences de résonance sur une bande fréquentielle qui s'étend jusqu'à 400 Hz. Notez que le haut parleur 2 est redondant pour le processus d'identification, il sera par la suite utilisé pour faire du contrôle actif du bruit. Les dimensions du caisson acoustique sont données dans le tableau 1.

Longueur L	Largeur W	Hauteur H	Lc	Ws
4,84 m	0,246 m	0,295 m	2,94 m	0,246 m

Table 1 : Dimensions du caisson acoustique

La réponse temporelle du microphone au bruit blanc est représentée dans la figure 6. Ce sont uniquement ces données temporelles qui seront utilisées par transformée de Fourier puis avec l'algorithme des sous-espaces pour déterminer les fréquences de résonance du caisson acoustique.

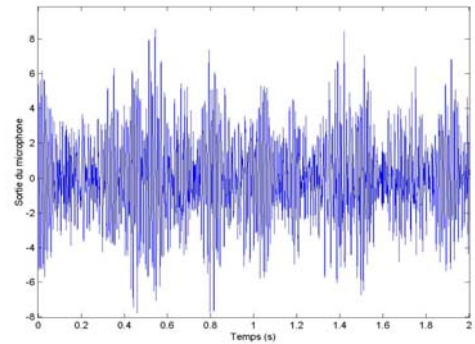


Figure 6 : Réponse temporelle du microphone

Les fréquences de résonance théoriques d'un caisson (ou d'une salle) de forme parallélépipédique sont données par la relation :

$$f_{r,s,t} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + \left(\frac{s}{W}\right)^2 + \left(\frac{t}{H}\right)^2} \quad (22)$$

avec r,s,t entiers et c la célérité du son. Dans notre étude, avec $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, nous obtenons les valeurs théoriques indiquées dans le tableau 2.

$f_{1,0,0}$	$f_{2,0,0}$	$f_{3,0,0}$	$f_{4,0,0}$	$f_{5,0,0}$
35,1 Hz	70,2 Hz	105,3 Hz	140,5 Hz	175,6 Hz
$f_{6,0,0}$	$f_{7,0,0}$	$f_{8,0,0}$	$f_{9,0,0}$	$f_{10,0,0}$
210,7 Hz	245,9 Hz	281 Hz	316,1 Hz	351,2 Hz

Table 2 : Fréquences de résonance théoriques du caisson acoustique

En définitive nous avons simplement des termes en $f_{r,0,0}$ puisque pour $s > 0$ et $t > 0$ les fréquences théoriques sont supérieures à notre valeur limite qui est de 400 Hz. En définitive nous avons donc $f_{r,0,0} = cr/2L$ et la dernière fréquence à identifier sera $f_{11,0,0} = 386,4$ Hz.

En appliquant la transformée de Fourier avec 2000 points puis avec 8000 points au signal temporel du microphone, nous obtenons les réponses en fréquence du caisson acoustique représentées dans les figures 7 et 8.

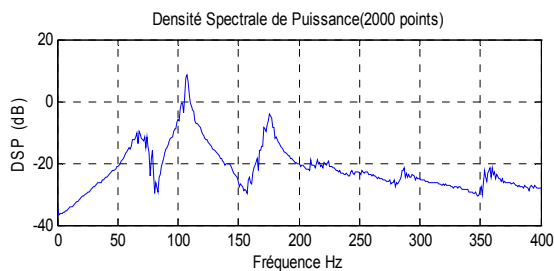


Figure 7 : Réponse fréquentielle du caisson acoustique par transformée de Fourier sur 2000 points

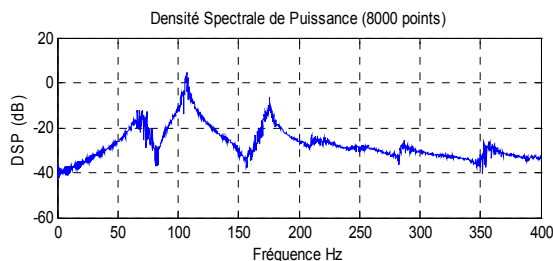


Figure 8 : Réponse fréquentielle du caisson acoustique par transformée de Fourier sur 8000 points

En considérant les pics qui apparaissent dans ces réponses fréquentielles nous déduisons les fréquences de résonance du caisson acoustique, qui sont indiquées dans le tableau 3.

f_2	f_3	f_5	f_8	f_{10}
68 Hz	106 Hz	174 Hz	288 Hz	356 Hz

Table 3 : Fréquences de résonance du caisson acoustique identifiées par la transformée de Fourier

A partir de ces transformées de Fourier il est très difficile d'identifier correctement toutes les fréquences de résonance du caisson. Seulement 5 fréquences de résonance sont visibles dans ce spectre. On utilise maintenant la technique d'identification des sous-espaces en ne considérant que le signal temporel provenant du microphone. L'ordre du processus varie de 20 à 140 et les modes parasites sont éliminés en utilisant les critères donnés par les inégalités (20) et (21). On obtient le

diagramme de stabilité en fréquence représenté dans la figure 9.

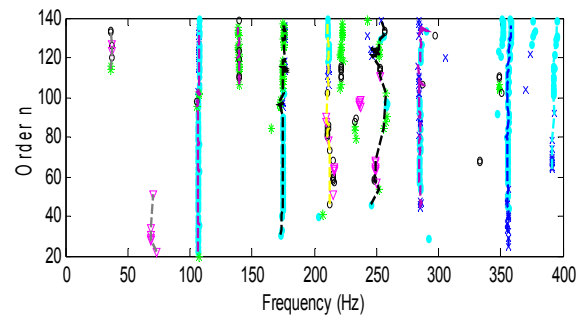


Figure 9 : Diagramme de stabilité en fréquence du caisson acoustique

A partir de ce diagramme de stabilité, par moyennage des valeurs identifiées, nous déduisons les fréquences de résonance du caisson acoustique. Nous obtenons alors les valeurs identifiées indiquées dans le tableau 4. Dix fréquences de résonance peuvent être identifiées. Seul le 9^{ème} mode à 316 Hz fait défaut.

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
36,7 Hz	69,5 Hz	106,9 Hz	139,3 Hz	174,8 Hz
f_6	f_7	f_8	f_{10}	f_{11}
211,2 Hz	251,3 Hz	284,9 Hz	355,9 Hz	392,4 Hz

Table 4 : Fréquences de résonance du caisson acoustique identifiées par sous-espaces

5 Conclusion

Deux algorithmes basés sur la matrice d'observabilité et sur la matrice de Hankel de signaux provenant d'un microphone ont été présentés. En utilisant les propriétés relatives à la suppression d'une ligne de ces matrices on obtient la matrice de transition qui contient toute l'information modale. On a montré que les deux algorithmes conduisent à la même identification. Un exemple numérique et un test expérimental ont été effectués, montrant que l'algorithme sous-espaces peut identifier des fréquences de résonance qui ne peuvent pas être décelées par la transformée de Fourier des signaux. Une recherche supplémentaire sur l'élimination des modes parasites doit être effectuée.

Références

- [1] Lardiès J. "Identification of a dynamical model for an acoustic enclosure using the wavelet transform", *Applied Acoustics*, 68, 473-490 (2007).
- [2] Lardiès J., Ta M., Salhi B., "Identification des modes de résonance d'un caisson acoustique par la transformée en ondelettes", CFA 2006, Tours
- [3] Aoki M. "State space modelling of time series" Springer-Verlag (1990).
- [4] J. N. Juang J.N. "Applied system identification" Prentice Hall, N.J. (1994).
- [5] Lardiès J. "Estimation of parameters and model order in state space innovation forms", *Inverse Problems in Engineering*, 8, 75-92 (2000).
- [6] Lardiès J. "Modal parameter identification based on ARMAV and state-space approaches", *Archive of Applied Mechanics*, 80, 335-352 (2010).