

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Dynamique atypique de milieux réticulés

Claude Boutin, Céline Chesnais, Stéphane Hans

Université de Lyon, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat. CNRS FRE3237 Rue M. Audin 69518 Vaulx-en-Velin, France.

Cet article traite de la dynamique très particulière qui peut se développer dans des systèmes réticulés. Il s'agit par exemple de mousses à cellules ouvertes dont la morphologie consiste en un réseau de poutres. Contrairement à des matériaux massifs, ces milieux peuvent présenter une déformabilité beaucoup plus forte en cisaillement qu'en extension-compression. Ceci permet l'émergence de phénomènes non classiques impliquant des cinématiques locales enrichies, ou l'apparition de résonances internes, selon la configuration étudiée et la gamme de fréquence. Cette question est abordée par la méthode d'homogénéisation des milieux discrets en faisant un usage systématique de l'analyse dimensionnelle. On considère le cas générique de cellules symétriques non contreventées à l'aide duquel différents comportements sont établis en faisant varier les propriétés des éléments de base de la cellule ainsi que la fréquence. Ce cadre théorique conduit à des descriptions macroscopiques continues analytiques - de type poutres généralisées pour les systèmes 1D, ou milieux continus augmentés pour les systèmes 2D - dont les paramètres résultent directement (et explicitement) de la structure de cellule. L'étude met en évidence des situations usuelles (ou presque) où la dynamique globale est associée à un état quasi statique local, et des situations très inhabituelles où il y a coexistence de dynamiques globale et locale. La formulation analytique donne une description des effets macroscopiques qui s'apparentent à ceux de la diffraction en milieux périodiques. L'effet de résonance interne se traduit par une masse effective fonction de la fréquence et par l'existence de fréquences de coupure associées aux modes de flexion locaux internes. Ces caractéristiques hors normes modifient fondamentalement la propagation d'ondes dans ces milieux.

1 Introduction

Cet article traite du comportement dynamique de systèmes réticulés. Supposant la taille de la cellule constitutive petite devant la longueur d'onde, le macro-comportement est déterminé à l'aide de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets [4] qui permet une description plus poussée du fonctionnement physique de la cellule que l'homogénéisation des milieux périodiques continus [11], [7]. L'étude fait un usage systématique de l'analyse dimensionnelle [2], [9]. Elle est réalisée sur le cas archétypique de cellules portiques non contreventées qui peuvent présenter un fort contraste de déformabilité en cisaillement et compression (contrairement aux milieux usuels "massifs"). Ceci ouvre la possibilité de cinématiques locales enrichies, introduisant des mécanismes de rotation globale, de déformation interne ou de résonance interne (coexistence de dynamiques globale et locale) selon la configuration étudiée et la gamme de fréquence, [1].

On donne en partie 2 un aperçu de la méthode et des hypothèses. La partie 3 est consacrée aux systèmes unidirectionnels de type poutre, pour lesquels on détaille les comportements vibratoires possibles en mode transversal et longitudinal. L'accent est mis sur les situations atypiques conduisant à des modes de girations et à des descriptions avec résonance interne. La partie 4 concerne la propagation d'onde dans des milieux bidimensionnels. Les effets de l'extrême anisotropie et de la résonance interne se traduisent par des caractéristiques hors normes des ondes. On soulignera en particu-

lier l'émergence d'une dynamique macroscopique non-newtonienne où la masse effective, fonction de la fréquence, introduit des fréquences de coupure, [5].

2 Homogénéisation de systèmes réticulés périodiques

L'homogénéisation de systèmes réticulés périodiques procède en deux étapes [13] : la discrétisation de l'équilibre dynamique puis l'homogénéisation proprement dite, conduisant au modèle continu élaboré à partir de la représentation discrète.

2.1 Equilibre dynamique discrétisé

Les systèmes étudiés (Fig.1-6) sont formés de plaques rigidement connectées, chacune fonctionnant comme des poutres d'Euler-Bernoulli pour les déplacements hors plan. Les déplacements de toutes extrémités connectées à un même noeud sont identiques et définissent les variables cinématiques discrètes du système. La discrétisation consiste à intégrer l'équilibre harmonique de la poutre, les déplacements et rotations des extrémités étant pris comme conditions aux limites. Les forces et moments appliqués par chaque élément à ses extrémités sont ainsi exprimés en fonction des variables nodales. L'équilibre dynamique de chaque élément étant satisfait, il reste à exprimer l'équilibre des forces et moment appliqués aux noeuds. Ainsi l'équilibre dynamique de la structure est rigoureusement réduit à l'équilibre des

noeuds.

2.2 Homogénéisation

L'hypothèse clef est que la taille de la cellule ℓ est petite devant la taille caractéristique L des vibrations de la structure, ainsi, $\epsilon = \ell/L \ll 1$. L'existence d'une échelle macroscopique est traduite par la variable d'espace macroscopique x , dont les variables physiques sont des fonctions continues. Celles-ci coïncident avec les variables discrètes en chaque noeud, soit : $U_\epsilon(x_n) = U(\text{noeud}_n)$. Ces quantités, ainsi que toute inconnue, sont supposées convergentes lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et, en conséquence, sont développées en puissances de ϵ : $U_\epsilon(x) = U^0(x) + \epsilon U^1(x) + \epsilon^2 U^2(x) + \dots$. Comme $\ell = \epsilon L$ est un petit incrément relativement à x , les variations des variables entre noeuds voisins s'expriment en séries de Taylor, ce qui introduit les dérivées macroscopiques.

Pour tenir compte de la physique, les caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments sont normalisées en puissance de ϵ . Concernant la fréquence modale, la normalisation résulte de l'équilibre entre forces élastique et inertielle à l'échelle macroscopique. La normalisation assure que chaque effet mécanique apparaît au même ordre indépendamment de la valeur de ϵ . De ce fait la même physique est respectée lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour le modèle homogénéisé. Enfin, les développements en puissance de ϵ sont introduits dans les équilibres nodaux. Ces relations, valides pour tout ϵ petit, conduisent, pour chaque ordre en ϵ , à des équations d'équilibre dont la résolution définit les équations macroscopiques.

2.3 Quasi-statique ou dynamique locale

La séparation d'échelle requiert généralement que lorsque le système global est en régime dynamique, les longueurs d'onde de flexion et compression générées dans chaque élément sont beaucoup plus grandes que la taille de l'élément. Dans ce cas, les forces nodales peuvent être développées en séries de Taylor selon ϵ . Cette situation correspond à un état quasi-statique à l'échelle locale. Toutefois, à plus hautes fréquences, il peut survenir que seules les longueurs d'onde de compression soient beaucoup plus grandes que l'élément et qu'apparaisse une résonance locale en flexion. L'homogénéisation reste cependant possible grâce au développements des forces de compression, mais conduit à des descriptions atypiques avec dynamique interne.

3 Comportement dynamique de poutres réticulées

Nous étudions dans cette partie les vibrations de structures de hauteur $H = N.\ell_w$ constituée par l'empilement d'un grand nombre N de portiques identiques non contreventés (Fig.1). Les paramètres des éléments horizontaux ($i = f$) et verticaux ($i = w$) sont : longueur ℓ_i ; épaisseur a_i ; section A_i ; inertie selon la direction e_3 $I_i = a_i^3 h / 12$; densité ρ_i et module élastique E_i .

La cinématique est caractérisée à chaque niveau n par les mouvements des deux noeuds dans le plan (e_1 ,

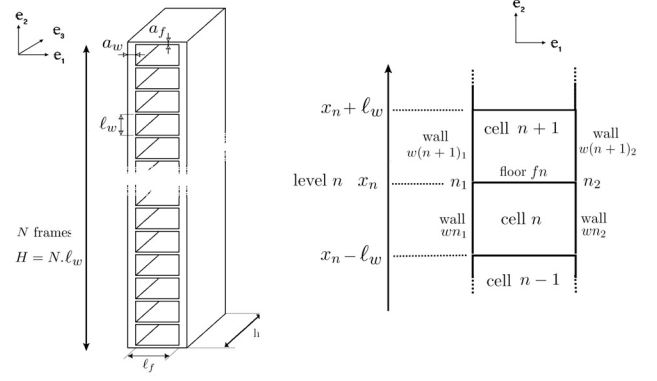


FIGURE 1 – Poutres réticulées étudiées et notations.

e_2), soit, les déplacements dans les deux directions et la rotation (u_1, u_2, θ). Ces six variables peuvent être remplacées par (i) trois variables associées au mouvement de corps rigide du niveau n : le déplacement transverse moyen, $U(n)$ selon e_1 , $V(n)$ selon e_2 et la rotation $\alpha(n)$ (différence des déplacements verticaux nodaux divisée par ℓ_f) et (ii) trois variables de déformation du niveau n : les rotations moyennes et différentielles des noeuds, $\theta(n)$ et $\Phi(n)$, et la dilatation transverse $\Delta(n)$, cf. Fig.2. Du fait de la symétrie longitudinale, les cinématiques transversale et longitudinale gouvernées respectivement par (U, α, θ) et (V, Φ, Δ) sont découplées.

Une étude systématique permet d'identifier les comportements possibles selon les propriétés des éléments de la cellule et la gamme de fréquence.

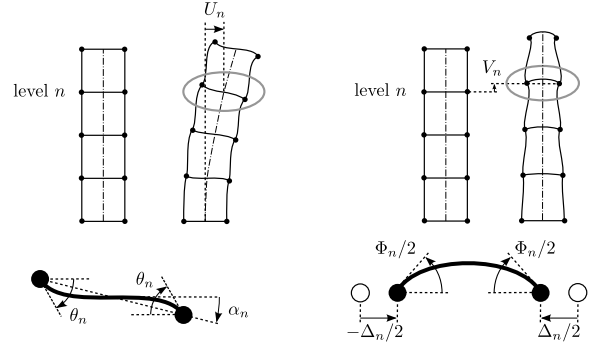


FIGURE 2 – Cinématiques, transverse à gauche, longitudinale à droite.

3.1 Vibrations Transversales

Selon les propriétés de la cellule, la méthode met en évidence deux types de vibrations transverses associés à la nature de l'équilibre dynamique. Pour le premier type, qui correspond aux modes "naturels" de vibration, les forces élastiques horizontales équilibrent l'inertie de translation horizontale. Pour le second type, le moment élastique équilibre l'inertie de rotation, ce qui conduit à des modes de gyration inusuels.

3.1.1 Modes "naturels" - Poutre générique, [9]

La synthèse des différents comportements possibles montre que les modes "naturels" se développent dans

un état local quasi-statique. Par ailleurs seuls trois mécanismes - flexion globale, cisaillement, flexion locale - gouvernent la physique, chacun étant associé à un paramètre de rigidité élastique de la cellule, $E_w I$, K , et $2E_w I_w$ respectivement, qui se déduisent des propriétés des éléments en statique.

La méthode permet de construire un modèle de poutre générique qui implique les variables de mouvement de corps rigide de la section U , α et inclut à l'ordre dominant le cisaillement et la flexion interne, en plus de la flexion globale usuelle. Ce modèle est gouverné par l'équation différentielle du sixième degré qui généralise la dynamique des poutres classiques, ainsi que des poutres sandwichs [10], [12] :

$$\frac{2E_w I_w E_w I}{K} U^{(6)}(x) - (2E_w I_w + E_w I) U^{(4)}(x) - \frac{E_w I}{K} \Lambda \omega^2 U^{(2)}(x) + \Lambda \omega^2 U(x) = 0 \quad (1)$$

Par dégénérescence, on retrouve les descriptions plus classiques (Timoshenko, Euler-Bernoulli, cisaillement). Notons que pour les modes naturels, l'inertie de rotation de section n'apparaît pas et que le cisaillement peut gouverner le comportement de poutres réticulées élançées, contrairement aux poutres "massives".

Les mécanismes pilotant le comportement réel d'une structure donnée peuvent être identifiés via une analyse dimensionnelle s'appuyant sur le modèle générique. En introduisant la taille caractéristique de vibration L , le changement de variables $\mathbf{x} = x/L$ transforme (1) en :

$$C \gamma U^{*(6)} - (1 + \gamma) U^{*(4)} - \Omega^2 U^{*(2)} + \frac{\Omega^2}{C} U^* = 0 \quad (2)$$

où par construction, les termes sans dimension notés par * sont $O(1)$. Utilisant pour L la taille caractéristique de vibration du mode fondamental d'une poutre encastree-libre, $\tilde{L} = \frac{2H}{\pi}$:

$$C = \frac{E_w I}{K \tilde{L}^2}, \quad \gamma = \frac{2E_w I_w}{E_w I} = \frac{2I_w}{I}, \quad \Omega^2 = \frac{\Lambda \omega^2 \tilde{L}^2}{K} \quad (3)$$

C et γ pèsent respectivement les contrastes entre flexion globale et cisaillement, et entre flexions interne et globale. Selon leur ordre de grandeur en puissance de $\tilde{\epsilon} = \ell/\tilde{L} = \frac{\pi}{2N}$, l'équation (2) dégénère en des formes simplifiées. C et γ constituent donc des critères d'identification permettant de recenser sept comportements dont les domaines de validité (Fig. 3) sont caractérisés par les deux paramètres p et q définis par : $C = \tilde{\epsilon}^p$ and $\gamma = \tilde{\epsilon}^q$.

3.1.2 Modes et poutre de gyration

A plus hautes fréquences, les forces élastiques ne peuvent contrebalancer l'inertie de translation, de sorte que la translation doit s'annuler. Cependant un nouvel équilibre dynamique est possible entre moment élastique et inertie de rotation. Le modèle atypique correspondant ne fait intervenir que la rotation de section pilotée par un mécanisme de traction-compression opposé dans les éléments verticaux. Les fréquences étant plus élevées, les conditions de quasi-statisme local ne sont plus nécessairement vérifiées et deux cas sont possibles, [6].

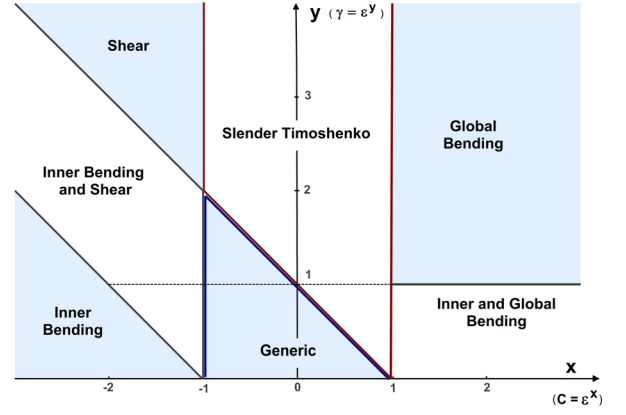


FIGURE 3 – Domaines de validité des différents comportements pour les modes "naturels" transverses en fonction des paramètres $C = \tilde{\epsilon}^p$ and $\gamma = \tilde{\epsilon}^q$

Quasi-statisme local : L'équation d'équilibre (en moment) est du second degré. Les paramètres sont la rigidité de flexion globale élastique et le cisaillement déjà déterminés ainsi que l'inertie de rotation de section usuelle J . Le modèle de poutre de gyration s'écrit :

$$E_w I \alpha''(x) - K \alpha(x) + J \omega^2 \alpha(x) = 0 \quad (4)$$

On notera la présence du terme de source interne de moment lié au cisaillement de la cellule. Ce modèle est illustré et confirmé numériquement sur une structure de $N = 15$ niveaux en Fig.4.

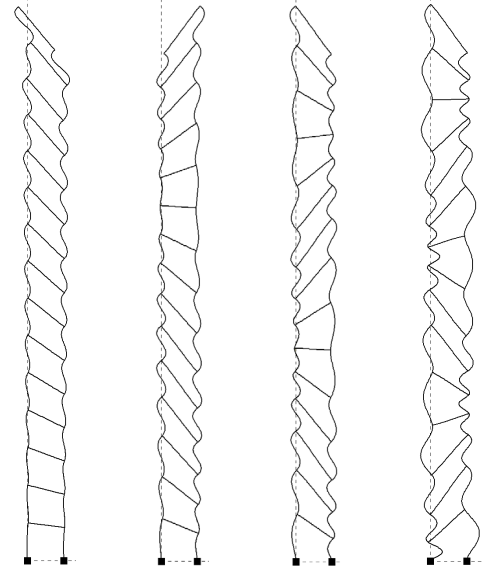


FIGURE 4 – Les quatre premiers modes de gyration d'une poutre formée de 15 cellules.

Dynamique interne : Dans ce cas la longueur d'onde de flexion est de l'ordre de la longueur des éléments, mais la longueur d'onde en compression reste largement supérieure. Le macro comportement reste gouverné par une équation différentielle du second degré de même allure formelle que dans le cas précédent. Cependant,

physiquement, il en diffère fondamentalement du fait que les termes inertiel et de source élastique dépendent ici de la fréquence :

$$E_w I \alpha''(x) - K(\omega) \alpha(x) + J(\omega) \omega^2 \alpha(x) = 0 \quad (5)$$

La dépendance fréquentielle de $J(\omega)$ et $K(\omega)$ tient son origine dans les efforts non développés associés à la dynamique de flexion locale interdisant tout découplage entre termes élastiques et inertiels. De tels effets, qui correspondent à une dynamique non-Newtonienne, apparaissent également en vibration longitudinale et sont discutés dans le paragraphe suivant.

3.2 Vibrations Longitudinales

Les vibrations longitudinales impliquent les variables (V, Φ, Δ) , cf. Fig.2 et présentent un moindre degré de complexité car le principal mécanisme est la compression verticale. Les différences entre les modèles identifiés tiennent à la présence ou non d'une dynamique interne, [6].

En situation de quasi-statisme local, on obtient la description usuelle d'une poutre en compression, de paramètre élastique $2E_w A_w$ et de masse linéique Λ :

$$2E_w A_w V''(x) + \Lambda \omega^2 V(x) = 0 \quad (6)$$

La présence d'une dynamique interne se traduit par une masse apparente fonction de la fréquence pour les mêmes raisons que celles mentionnées plus haut.

$$2E_w A_w V''(x) + \Lambda(\omega) \omega^2 V(x) = 0 \quad (7)$$

où :

$$\begin{cases} \Lambda(\omega) &= \Lambda_w + \Lambda_f \psi\left(\frac{\omega}{\omega_{f1}}\right) \\ \psi(\bar{\omega}) &= \frac{1}{3\pi\sqrt{\bar{\omega}}(\coth(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\bar{\omega}}) + \cot(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\bar{\omega}}))} \end{cases}$$

A nouveau, la présence conjointe d'une dynamique locale et globale fait passer d'une description newtonienne à l'échelle microscopique à une description non-newtonienne à l'échelle globale. L'étude de l'expression analytique de la masse apparente $\Lambda(\omega)$ montre que [5] (i) $\Lambda(\omega) \rightarrow \Lambda$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, et (ii) $|\Lambda(\omega)| \rightarrow \infty$ lorsque $\omega \rightarrow \omega_{f2k+1}$, où ω_{f2k+1} sont les fréquences des modes impairs des éléments horizontaux en flexion (cf. Fig. 5 tracée pour $\Lambda_w = \Lambda_f$). Ceci induit une réponse anormale du système au voisinage de ces fréquences ω_{f2k+1} qui se traduit par un spectre discret an-harmonique de fréquences de coupure.

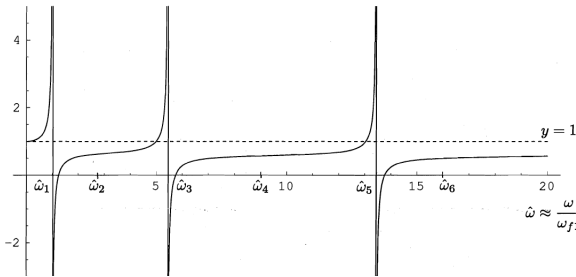


FIGURE 5 – Effet de la résonance interne sur la masse apparente adimensionnelle : $(1 + \psi(\frac{\omega}{\omega_{f1}}))/2$

4 Ondes en milieux réticulés

On s'intéresse ici à la propagation d'ondes dans des milieux bidimensionnels infinis faits de la répétition périodique de portiques non contreventés (Fig. 6) en nous limitant au cas où les éléments sont identiques dans les deux directions. La méthode d'homogénéisation est la même que pour l'étude des poutres mais prend en compte ici la périodicité dans les deux directions. Ainsi, par rapport aux structures 1D où seule la périodicité axiale était prescrite, les cinématiques (homogénéisables) sont restreintes par la périodicité biaxiale qui interdit tout mouvement de corps rigide de la cellule en rotation.

Ces milieux ont cependant des particularités fortes, [5] : d'une part, leur extrême anisotropie qui résulte de la présence d'éléments résistants dans deux directions seulement (et ceci même lorsque les éléments poutres constituants sont identiques), d'autre part, la possibilité de propagation d'onde avec résonance interne, rendue possible par la rigidité beaucoup plus élevée en compression qu'en cisaillement. L'étude des ondes planes dé-

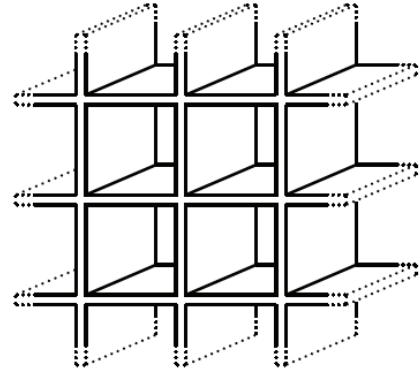


FIGURE 6 – Milieu bidimensionnel étudié.

taillée ci-dessous s'appuie sur la description macroscopique établie par homogénéisation et sur la décomposition des champs d'onde à l'aide du théorème d'Helmholtz.

4.1 Ondes de cisaillement pur

On montre que des ondes de cisaillement pur ne se développent que dans les deux directions définies par les éléments de la cellule. Localement ces ondes ne font travailler les éléments qu'en flexion. En conséquence, du fait de la séparation d'échelle, d'une part la gamme de fréquence où ce mode de propagation est homogénéisable est d'un ordre inférieur à la fréquence fondamentale des éléments en flexion ($\omega = O(\epsilon \omega_{f1})$), d'autre part, la cellule est en régime quasi-statique.

Dans cette gamme de fréquence, il n'existe que ces deux ondes de cisaillement dans ces directions discrètes. En effet, hors de ces directions les ondes contraignent les éléments à travailler en compression. Mais comme la rigidité de compression est beaucoup plus élevée, le milieu reste macroscopiquement en régime quasi-statique.

4.2 Ondes de cisaillement-compression

Dans la gamme de fréquence $\omega = O(\omega_{f1})$, les ondes sont possibles dans toutes les directions, mais associent les effets anisotropes de la structure biaxiale du milieu et les effets de résonance interne en flexion.

4.2.1 Effet d'anisotropie

Macroscopiquement comme dans les milieux anisotropes, il n'existe pas d'onde pure ni de cisaillement ni de compression hors des axes matériels. La vitesse des ondes de cisaillement-compression dépend de l'orientation et atteint son maximum dans les axes matériels où elles correspondent à des ondes de compression pure (dans cette gamme de fréquence). Localement, une onde de cisaillement-compression se propageant dans la direction α est produite par des modes de compression de poutre se propageant selon les axes matériels mais présentant un déphasage entre chaque strate matérielle de sorte que tout point d'une ligne perpendiculaire à la direction α est animé du même mouvement. Il s'agit ici d'un des modes, pour le second mode les rôles respectifs des éléments dans les deux directions est inversé. On en déduit que la vitesse c_α est reliée à la vitesse de compression c_0 selon un axe matériel par la simple relation $c_\alpha = c_0 \cos(\alpha)$. On notera que la forte anisotropie du milieu se traduit par des polarisations canalisées dans les deux directions matérielles quelle que soit la direction de propagation.

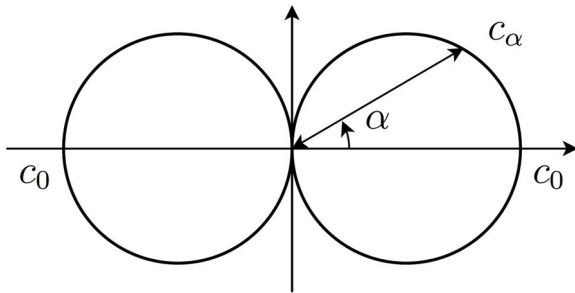


FIGURE 7 – Vitesse des ondes de cisaillement-compression polarisées selon l'axe matériel défini par c_0 , se propageant dans la direction α . Pour le deuxième mode, polarisé perpendiculairement, le graphe doit être pivoté de $\pi/2$.

4.2.2 Effet de résonance interne

Comme déjà vu dans le cas des poutres, en conséquence de la dynamique interne, la masse macroscopiquement apparente est la masse réelle corrigée d'un terme fonction de la fréquence. La figure (Fig. 8) présente le module et l'argument de la masse apparente en fonction de la fréquence. Pour une meilleure adéquation avec la réalité physique, nous avons introduit un amortissement de 2% pour le matériau constitutif des poutres via un module complexe. On note qu'au voisinage des $\omega_{f_{2k+1}}$, la masse apparente est à valeur complexe et de module plus fort que la masse réelle. Au contraire, au delà de la fréquence fondamentale de flexion ω_{f1} et en dehors des résonances impaires, la masse apparente est réelle et inférieure à la masse vraie. En conséquence,

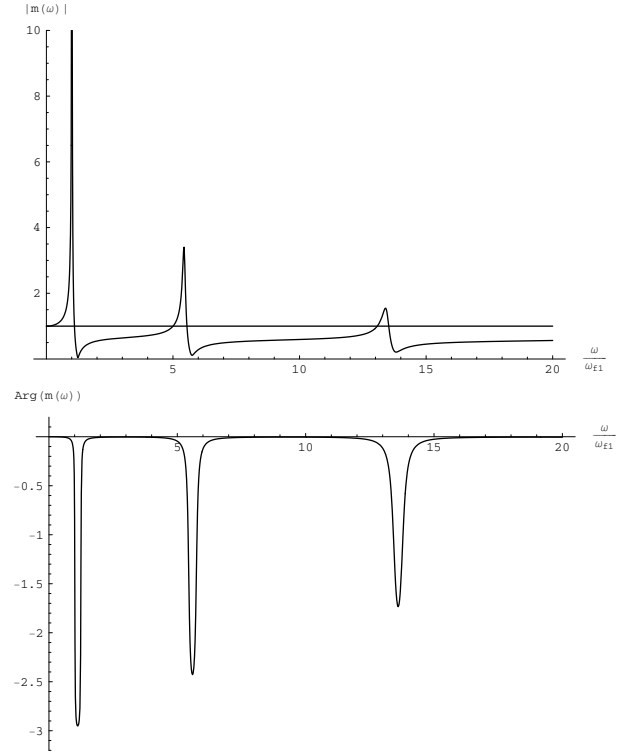


FIGURE 8 – Module (en haut) et argument (en bas) du rapport entre masse apparente et masse réelle pour un amortissement matériel de 2 %.

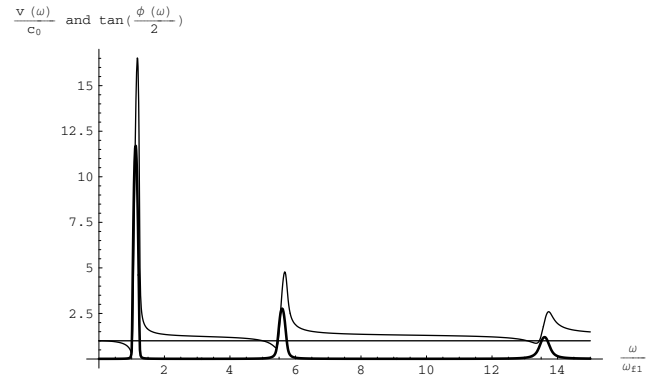


FIGURE 9 – Rapport entre les vitesses d'ondes à masse constante et avec effet dynamique interne pour un amortissement matériel de 2 %.

le milieu devient fortement dispersif (Fig. 9). Dans les gammes de fréquences de coupe correspondant à une masse complexe, l'onde ne peut se propager. En dehors de ces intervalles de fréquence, les ondes se propagent plus rapidement qu'à basse fréquence grâce à la dynamique interne.

5 Conclusion

Les milieux réticulés présentent une diversité de comportement beaucoup plus grande que les milieux massifs. En particulier, les modes de gyration ou l'apparition d'effet de dynamique interne sont impossibles dans les poutres et matériaux usuels.

Ces résultats théoriques présentent de fortes analogies avec les théories des milieux continus généralisés [8] et apportent des éléments nouveaux dans le domaine de

la dynamique. Des comparaisons avec des calculs numériques ont confirmé la validité de ces développements [9]. Ces descriptions, formulées de manière adimensionnelle, offrent un cadre d'analyse systématique pour explorer la dynamique de milieux réticulés à morphologie plus complexe tels que les mousses, matières végétales, os, ..., mais aussi la dynamique de structures de grandes tailles telles que les bâtiments, [3]. Enfin, l'exploitation de ces propriétés atypiques peut être envisagée pour la réalisation de milieux à caractéristiques particulières pour l'acoustique.

Références

- [1] Boutin C., Hans S., Chesnais C., 2009, "Generalized beam and continua. Dynamics of reticulated structures" Euromech Colloquium 510 Mechanics of generalized continua : A hundred years after the Cosserats, May 13-16 Paris. Maugin and Metrikine Eds. Springer.
- [2] Boutin, C., Hans, S., 2003 "Homogenisation of periodic discrete medium : Application to Dynamics of framed structures", Computers and Geotechnics, 30(4), pp303-320.
- [3] Boutin, C., Hans, S., Ibraim, E., Roussillon, P., 2005, " In situ experiments and seismic analysis of existing buildings - Part II", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 34, pp1531-1546.
- [4] Caillerie, D., Trompette, P., Verna, P., 1989, " Homogenisation of periodic trusses", Congres IASS, Madrid, pp 7139-7180.
- [5] Chesnais C., Hans S., Boutin C., 2007, "Wave propagation and diffraction in discrete structures - Effect of anisotropy and internal resonance" ICIAM 16-20 july Zurich.
- [6] Chesnais C., 2010, "Dynamique de milieux réticulés non contreventés. Applications aux bâtiments" PhD thesis in preparation, ENTPE, Lyon.
- [7] Cioranescu, D., Saint Jean Paulin, J., 1999. *Homogenization of reticulated structures*, Applied Mathematical Sciences 136, Springer.
- [8] Eringen, A.C., 1968, "Mechanics of micromorphic continua", IUTAM Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications, Springer-Verlag (Berlin), pp18-35.
- [9] Hans, S., Boutin, C., 2008, "Dynamics of discrete framed structures : a unified homogenized description", Journal of Mechanics of Materials and Structures, 3(9), pp1709-1739.
- [10] Kerr, A.D., Accorsi, M.L., 1985, "Generalization of the equations for frame-type structures - a variational approach", Acta Mechanica, 56(1- 2), pp55-73.
- [11] Sanchez-Palencia E., 1980, Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture note in physics - Springer-Verlag (Berlin), 127.
- [12] Skattum K.S., 1971, "Dynamic analysis of coupled shear walls and sandwich beams", Rep. Nř EERL71-06. PhD. California Institute of Technology. Pasadena. California.
- [13] Tollenaere, H., Caillerie, D., 1998, "Continuum modeling of lattice structures by homogenization", Advances in Engineering Software, 29(7-9), pp699-705.