

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Utilisation d'une antenne synthétique pour simuler l'effet d'une couche limite turbulente

Mathieu Aucejo¹, Laurent Maxit¹, Jean-Louis Guyader¹

¹ Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA de Lyon, 25 bis avenue Jean Capelle F-69621 Villeurbanne Cedex, mathieu.aucejo@insa-lyon.fr

L'effet d'une couche limite turbulente sur une structure peut être étudié expérimentalement dans un tunnel aérodynamique. Ces essais sont néanmoins difficiles et coûteux à mettre en place quand on considère une structure de type industriel. Pour contourner ces obstacles, nous proposons dans ce papier de simuler l'effet d'une couche limite turbulente à partir de la superposition d'ondes planes acoustiques décorréliées. Les ondes acoustiques doivent alors être contrôlées en amplitude et en incidence ce qui peut être réalisé à partir d'une antenne de monopoles. Dans un premier temps, nous établissons les équations permettant de déterminer l'amplitude et la phase de chaque monopole de l'antenne. Nous nous intéressons ensuite d'un point de vue numérique aux paramètres optimaux de conception de l'antenne comme sa taille, le nombre de monopoles et sa distance par rapport au plan d'observation. Nous montrons ensuite qu'un nombre relativement réduit de monopoles permet de reconstruire correctement le champ de pression pariétale. La technique de l'antenne synthétique permet de réduire les sources d'excitation à une seule source que l'on déplace spatialement. Les résultats d'une expérience numérique sont finalement présentés afin de démontrer la validité de l'approche.

1 Introduction

La mesure expérimentale de la réponse d'une structure soumise à une excitation aléatoire de type couche limite turbulente (CLT) revêt un fort intérêt dans de nombreux secteurs industriels, notamment en automobile, en aéronautique ou en acoustique sous-marine. Ces phénomènes sont classiquement étudiés en tunnel aérodynamique ou au moyen d'essais *in situ* (essais en vol ou en bassin). Cependant, leur mise en œuvre s'avère à la fois délicate et coûteuse. C'est pourquoi des méthodes alternatives ont été proposées afin de s'affranchir de ces difficultés. Ainsi, dès 1966, Fahy [1] étudie différentes approches pour simuler les excitations CLT. Il montre notamment qu'il est théoriquement possible de simuler une telle excitation à partir d'actionneurs alimentés de manière appropriée (excitateurs électromagnétiques ou haut-parleurs). La faisabilité expérimentale des ces principes a été étudiée par Robert [2] et Bravo & Maury [3, 4]. Robert a ainsi montré qu'il était expérimentalement possible de reconstituer la réponse vibratoire d'une plaque soumise à une CLT à partir d'un nombre limité de forces ponctuelles aléatoires stationnaires, tandis que Bravo & Maury ont utilisé à cette fin une antenne de haut-parleurs pilotée en amplitude et en phase et placée dans le champ proche de la structure à tester.

Dans ce papier, nous proposons une approche pour simuler l'effet d'une couche limite turbulente à partir d'ondes planes décorréliées. L'amplitude et l'incidence de ces ondes planes doivent être définies de manière à ce que l'ensemble de ces ondes puissent représenter un modèle de fluctuations de pression d'une couche limite turbulente. Dans un premier temps, ce lien entre les ondes planes et le modèle de CLT est établi. Nous nous intéressons ensuite à la génération de ces ondes planes par

un réseau de sources monopolaires. Nous cherchons par une étude numérique, à déterminer la valeur optimale des paramètres de conception de l'antenne, comme sa taille, le nombre de monopoles et sa distance par rapport au plan d'observation. D'autre part, pour limiter le nombre de sources, qui peut devenir important suivant les longueurs d'ondes à reconstruire, le principe de l'antenne synthétique est introduit. Cette technique permet de n'utiliser qu'une seule source que l'on déplace spatialement, ce qui permet de composer virtuellement une antenne dont la distance entre monopoles peut être très faible. Finalement, la méthodologie exposée dans ce papier sera validée à partir d'une expérience simulée numériquement.

2 Décomposition de l'excitation CLT par des ondes planes décorréliées

L'approche développée dans ce papier est basée sur la superposition d'ondes planes décorréliées pour modéliser l'effet d'une couche limite turbulente par analogie avec la modélisation d'un champ diffus, qui peut être représenté par des ondes planes décorréliées équiprobables en incidence. La principale différence entre ces deux types d'excitation aléatoire réside dans leur contenu spectral comme le présente la figure (1). En effet, contrairement au champ diffus, l'excitation par couche limite turbulente s'étend bien au-delà du domaine acoustique. Ainsi, la modélisation de l'effet d'une couche limite turbulente par un champ d'ondes planes implique à la fois la génération d'ondes propagatives et évanescentes dans la direction de propagation.

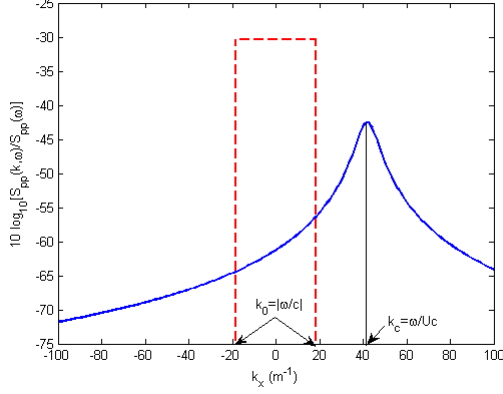


FIGURE 1 – Comparaison des excitations par champ diffus et CLT dans l'espace des nombres d'onde - (-) CLT and (- -) champ diffus

Pour ce faire, on suppose connu l'interspectre des fluctuations de pression de la couche limite turbulente. Dans la littérature, de nombreux modèles (Corcos [5], Chase [6], ...) ont été établis pour modéliser l'excitation par CLT au niveau d'une paroi plane. Ces modèles permettent de relier les fluctuations de pression pariétale aux paramètres de la CLT (vitesse de convection, épaisseur de la CLT, ...). L'interspectre de fluctuations de pression $S_{p_b p_b}(\xi_x, \xi_y, \omega)$ est relié à l'interspectre dans l'espace des nombres d'ondes par une transformée de Fourier spatiale :

$$S_{p_b p_b}(\xi_x, \xi_y, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{p_b p_b}(k_x, k_y)}{4\pi^2} e^{jk_x \xi_x + jk_y \xi_y} dk_x dk_y \quad (1)$$

où $\xi_x = x' - x$ et $\xi_y = y' - y$.

La discrétisation de cette équation sur le domaine des nombres d'onde, nous donne :

$$S_{p_b p_b}(\xi_x, \xi_y, \omega) = \sum_{r,s} \frac{S_{p_b p_b}(k_r, k_s)}{4\pi^2} e^{jk_r \xi_x + jk_s \xi_y} \Delta k_r \Delta k_s \quad (2)$$

D'autre part, nous considérons pour chaque couple de nombres d'onde (k_r, k_s) , une onde plane P_{rs} :

$$P_{r,s}(x, y, \omega) = A(k_r, k_s) e^{-jk_r x - jk_s y} \quad (3)$$

L'interspectre de cette onde $S_{P_{rs} P_{rs}}$ est alors donné par :

$$S_{P_{rs} P_{rs}}(\xi_x, \xi_y, \omega) = |A(k_r, k_s)|^2 e^{jk_r \xi_x + jk_s \xi_y} \quad (4)$$

Nous pouvons ainsi déterminer l'amplitude de chaque onde plane à reconstruire en identifiant l'interspectre d'une onde plane à la valeur de l'intégrande de l'équation (2). L'amplitude de l'onde plane doit ainsi vérifier :

$$|A(k_r, k_s)|^2 = \frac{S_{p_b p_b}(k_r, k_s) \Delta k_r \Delta k_s}{4\pi^2} \quad (5)$$

On peut alors réécrire l'équation (2) sous la forme :

$$S_{p_b p_b}(\xi_x, \xi_y, \omega) = \sum_{r,s} S_{P_{rs} P_{rs}} \quad (6)$$

Cette équation traduit le fait que l'on puisse représenter les fluctuations de pressions pariétales par un champ d'onde planes décorréliées.

En théorie, une infinité d'ondes planes est nécessaire pour décrire l'interspectre $S_{p_b p_b}(\xi_x, \xi_y, \omega)$. En pratique, seuls les nombres d'onde inférieur à un nombre d'onde de coupure $\bar{k}$ auront une contribution significative. Le nombre d'onde $\bar{k}$ dépend de la structure étudiée (nombre d'onde naturel de la structure), de la couche limite turbulente (nombre d'onde convectif) et du milieu fluide environnant (nombre d'onde acoustique).

3 Génération d'un champ de pression pariétale de type ondes planes à partir d'une antenne de monopoles

3.1 Principe

Nous nous intéressons dans cette partie à la génération d'une onde plane P_{rs} d'amplitude $A(k_r, k_s)$ au niveau de la paroi.

Une manière naturelle de créer une pression pariétale de type onde plane est d'utiliser une excitation par onde plane acoustique. Considérons une onde plane dans le milieu acoustique de la forme $Ae^{-jk_r x - jk_s y - jk_z z}$. Le triplet (k_r, k_s, k_z) est relié au nombre d'onde acoustique k_0 par l'équation (7).

$$k_0 = \sqrt{k_r^2 + k_s^2 + k_z^2} \quad (7)$$

Dans la mesure où les nombres d'onde k_r et k_s à créer au niveau de la paroi sont connus, puisque déterminés à partir de la longueur d'onde à reconstruire, le nombre d'onde k_z doit alors vérifier l'équation (8) :

$$\begin{cases} k_z = \sqrt{k_0^2 - k_r^2 - k_s^2} & \text{si } k_0^2 > k_r^2 + k_s^2 \\ k_z = j\sqrt{k_0^2 - k_r^2 - k_s^2} & \text{si } k_0^2 < k_r^2 + k_s^2 \end{cases} \quad (8)$$

Suivant les cas, l'équation (8) indique que des ondes propagatives ($k_z \in \mathbb{R}$) ou évanescentes ($k_z \in \mathbb{I}$) doivent être générées dans la direction z . Ce deuxième type d'onde est difficile à générer en pratique. C'est pour cela, que nous proposons de recréer le champ de pression pariétale à partir d'un réseau de monopoles comme présenté en figure (2).

Le calcul de l'amplitude et la phase de chacun des monopoles constituant l'antenne s'effectue en posant l'égalité de la pression pariétale créée par une onde plane de nombre d'onde (k_r, k_s) et de celle due à l'antenne de monopoles :

$$\sum_m B_m^{r,s}(\omega) H_{mp} = A(k_r, k_s) e^{-jk_r x_p - jk_s y_p} \quad (9)$$

où H_{mp} est la fonction de transfert entre un monopole de coordonnées (x_m, y_m, z_m) et un point de coordonnées $(x_p, y_p, 0)$ de la paroi.

Théoriquement, H_{mp} s'identifie comme la fonction de Green en espace semi-infini :

$$H_{mp} = \frac{e^{-jk_0 \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2 + z_m^2}}}{2\pi \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2 + z_m^2}} \quad (10)$$

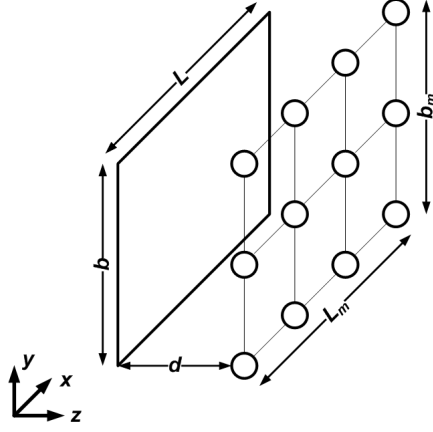


FIGURE 2 – Définition de l'antenne de monopoles

L'équation (9) peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$[H] \{B_m^{r,s}\} = \{P\} \quad (11)$$

Dans la majorité des cas l'opérateur de propagation H est rectangulaire et, de ce fait, l'équation (11) est résolue au sens des moindres carrés.

3.2 Etude de l'influence des paramètres de l'antenne

Dans la définition de l'antenne de monopoles, trois paramètres essentiels interviennent, à savoir le nombre de monopoles utilisés, la taille de l'antenne et la distance de l'antenne par rapport à la paroi. Nous allons nous attacher dans cette partie à étudier l'influence de ces paramètres sur la reconstruction des fluctuations de pression à partir d'un champ d'ondes planes.

Pour analyser l'influence de chacun des paramètres, nous allons comparer le modèle d'interspectre de référence que nous cherchons à reconstruire avec celui obtenu à partir de la décomposition du champ de pression en ondes planes décorréliées. Dans ce papier, nous cherchons, par exemple, à reconstruire l'interspectre de pression pariétale donné par le modèle de Corcos [5], dont les paramètres sont explicités dans la section 4 :

$$\frac{S_{p_b p_b}(k_x, k_y, \omega)}{S_{pp}(\omega)} = \frac{4\alpha_x \alpha_y U_c^2}{\omega^2 \left[\alpha_x^2 + \left(1 - \frac{U_c k_x}{\omega}\right)^2 \right] \left[\alpha_y^2 + \left(\frac{U_c k_y}{\omega}\right)^2 \right]} \quad (12)$$

où $S_{pp}(\omega)$ est l'autospectre de pression pariétale, U_c est la vitesse de convection, et (α_x, α_y) sont les coefficients du modèle de Corcos.

On suppose également que seuls les nombres d'onde inférieurs ou égaux à $\bar{k}$ ont une contribution significative, ce qui signifie que la longueur d'onde minimale à reconstituer est $\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}}$. Pour les figures présentées dans cette partie, on fixe $\bar{k} = 50 \text{ m}^{-1}$.

3.2.1 Nombre minimal de monopoles par longueurs d'onde à reconstituer

Pour déterminer la distance minimale entre monopoles, nous supposons que la taille de l'antenne est égale à celle de la paroi et que ces dernières sont distantes de

$\frac{\lambda_{ac}}{2}$ (λ_{ac} : longueur d'onde acoustique). La figure (3) présente l'influence du nombre de monopoles sur la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale, lorsque l'on utilise de 2 à 6 monopoles par longueur d'onde minimal $\bar{\lambda}$ à reconstituer.

La reconstruction est en défaut à partir de $|k_x| = 26 \text{ m}^{-1}$ lorsque l'on utilise 2 monopoles par longueur d'onde à $\bar{k}$ et à partir de $|k_x| = 42 \text{ m}^{-1}$ lorsque l'on utilise 3 monopoles par longueur d'onde à $\bar{k}$. Pour ces nombres d'ondes, nous avons environ 3.7 monopoles par longueur d'onde, ce qui est un résultat similaire à celui donné par Maury & Bravo dans [4]. Cette figure met donc en évidence qu'il faut au minimum 4 monopoles par longueur d'onde pour obtenir un interspectre de pression pariétale reconstruit égale à l'interspectre de référence.

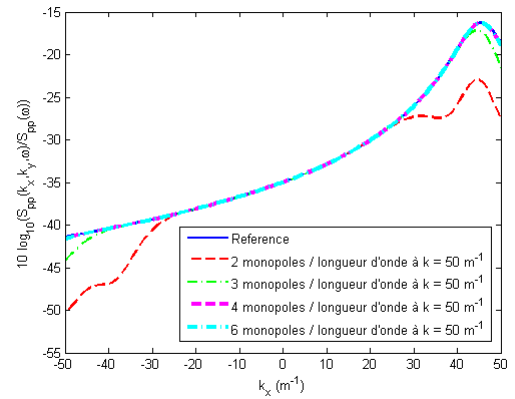


FIGURE 3 – Influence du nombre de monopoles sur la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale donné par le modèle de Corcos dans le plan $(k_x, 0)$

3.2.2 Taille de l'antenne

Pour vérifier la sensibilité de ce paramètre, nous supposons que l'antenne est constituée de 4 monopoles par longueur d'onde et que l'antenne et la paroi sont distantes de $\frac{\lambda_{ac}}{2}$. La figure (4) présente l'influence de la taille de l'antenne sur la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale donné par le modèle de Corcos pour une antenne de longueur $L_m = d_a L$ et de largeur $b_m = d_a b$ (avec $d_a \in [\frac{1}{2}, 2]$, L et b : longueur et largeur de la paroi).

Cette figure montre que la taille de l'antenne doit être supérieure ou égale à celle de la paroi.

3.2.3 Distance antenne-paroi

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1, nous devons générer des ondes qui peuvent être propagatives ou évanescentes dans la direction z . De ce fait, la distance d entre l'antenne et la paroi peut jouer sur l'atténuation des ondes que l'on veut créer. Pour étudier ce paramètre, nous supposons que l'antenne est constituée de 4 monopoles par longueur d'onde et que la taille de l'antenne est égale à celle de la paroi. La figure (5) présente l'influence de la distance entre l'antenne et la paroi pour une distance $d \in [\frac{\lambda_{ac}}{6}, 2\lambda_{ac}]$.

Cette figure montre que la qualité de reconstruction est relativement indépendante de la distance à la paroi.

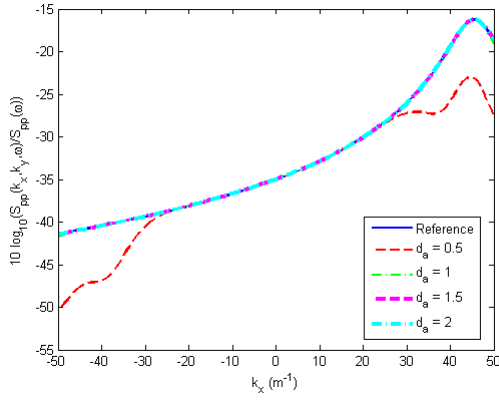


FIGURE 4 – Influence de la dimension de l'antenne de monopoles sur la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale donné par le modèle de Corcos dans le plan $(k_x, 0)$

Nous notons également que lorsque l'on est très loin de la paroi, par exemple pour $d = 2\lambda_{ac}$, la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale est imparfaite en raison du mauvais conditionnement du problème à résoudre. Il est aussi intéressant de noter qu'il n'est pas nécessaire d'être dans le champ proche de la paroi pour assurer une bonne reconstruction. D'un point de vue pratique, la relative insensibilité de ce paramètre permet de ne pas avoir à déplacer (avancer ou reculer) l'antenne à chaque fréquence. Il est donc théoriquement possible de fixer une distance d unique, compromis entre les fréquences minimale et maximale d'étude.

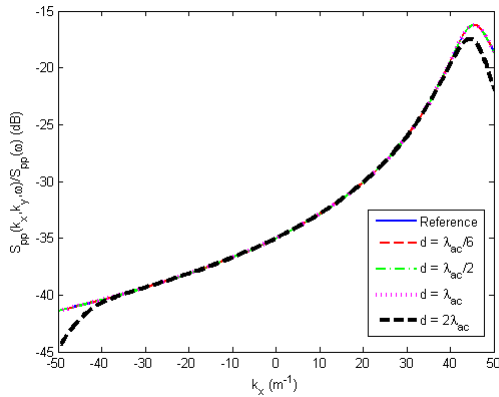


FIGURE 5 – Influence de la distance antenne-surface cible sur la reconstruction de l'interspectre de pression pariétale donné par le modèle de Corcos dans le plan $(k_x, 0)$

4 Validation de la méthode par une expérience simulée numériquement

Pour valider la méthode proposée, nous considérons une plaque d'aluminium simplement appuyée sur ces quatre bords de $0.6 \times 0.4 \text{ m}^2$, d'épaisseur 0.001 m et de facteur d'amortissement $\eta = 0.02$. Cette plaque est excitée par une couche limite turbulente de vitesse de

convection $U_c = 105 \text{ m.s}^{-1}$ vérifiant le modèle de Corcos, dont les coefficients sont $(\alpha_x, \alpha_y) = (0.116, 0.7)$. Nous effectuons un premier calcul de référence à partir de l'approche standard décrite par Strawderman & Brand dans [7], permettant de calculer la réponse d'une structure excitée par un champ aléatoire. Par ailleurs, nous simulons numériquement la réponse de la plaque aux différentes ondes planes générées par une antenne de monopoles tel que nous l'avons décrit dans les sections 2 et 3.

L'antenne est dimensionnée de manière à reconstituer la plus petite des longueurs que l'on souhaite décrire. Dans notre cas, nous souhaitons reconstruire tous les modes jusqu'au mode 8×5 ($f_{8,5} = 807 \text{ Hz}$) de la plaque ce qui correspond au couple de longueurs d'onde minimales $(\lambda_x, \lambda_y) = (0.15 \text{ m}, 0.16 \text{ m})$. Nous utilisons ainsi une antenne de 160 monopoles (16 suivant la longueur et 10 suivant la largeur), correspondant à un critère de 4 monopoles par longueurs d'onde à reconstruire. La dimension de l'antenne est égale à celle de la plaque. Enfin, la distance entre l'antenne et la plaque est fixée à 0.4 m , ce qui correspond à $\lambda_{ac}/8$ à 105 Hz , $\lambda_{ac}/2$ à 425 Hz et λ_{ac} à 800 Hz .

La figure (6) présente la comparaison des vitesses quadratiques au point $(x_p, y_p) = (0.2 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$ de la plaque. Cette figure montre un très bon accord entre la vitesse quadratique de référence et celle reconstruite à partir de l'antenne de monopoles.

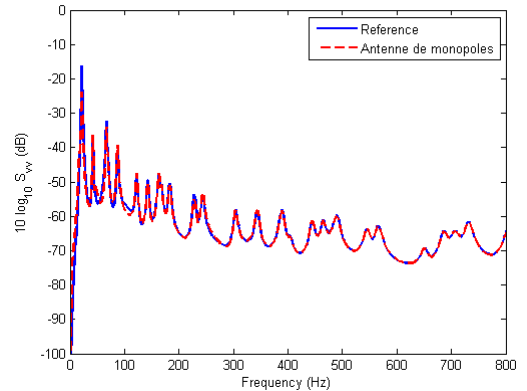


FIGURE 6 – Comparaison des vitesses quadratiques au point $(x_p, y_p) = (0.2 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$

5 Antenne synthétique : principe expérimental

Le principe de l'antenne synthétique s'appuie sur la linéarité des phénomènes mis en jeu, puisque nous avons appliqué le principe superposition pour définir l'antenne (cf. équation (9)). De ce fait, la réponse à une antenne de monopoles peut être obtenue en sommant les réponses à chacun des monopoles. Le concept de l'antenne synthétique consiste donc à n'utiliser qu'un seul monopole que l'on balaie spatialement pour créer virtuellement l'antenne de monopoles.

En pratique, la fonction de transfert H_{mp} entre le

monopole m et les points de reconstruction p de la paroi ne correspondant pas exactement à la fonction de Green en espace semi-infini, il faut donc la mesurer en l'absence de la paroi en excitant le monopole par un bruit blanc. Cela permet ainsi à partir de l'équation (9) de déterminer l'amplitude et la phase (B_m) à appliquer à la source monopolaire pour chacune des positions d'excitation et chaque couple de nombre d'onde (k_r, k_s). Ensuite en présence de la paroi, il faut mesurer à l'aide d'un vibromètre laser ou d'accéléromètres la fonction de transfert H_{Qm} entre le champ vibratoire X (déplacement, vitesse ou accélération) au point Q de la structure et le monopole exciteur, qui est alimentée par un bruit blanc. La détermination de la réponse de la structure soumise à une couche limite turbulente s'effectue alors au cours de la phase de post-traitement des données, consistant à multiplier H_{Qm} par l'amplitude de chaque monopole B_m et à cumuler quadratiquement les réponses ainsi obtenues (cf. équation (13)).

$$S_{XX}(Q, \omega) = \sum_{r,s} \left| \sum_m H_{Qm}(\omega) B_m^{r,s}(\omega) \right|^2 \quad (13)$$

Les avantages d'une telle démarche sont multiples. Tout d'abord, le coût de l'antenne se trouve réduit, dans la mesure où nous n'utilisons qu'une seule source monopolaire. D'autre part, l'utilisation d'une antenne synthétique permet une plus grande flexibilité, puisqu'il n'y a pas de contraintes concernant le nombre de monopoles. Une antenne synthétique permet donc de reconstituer autant d'ondes planes que nécessaire. D'un point de vue pratique, nous nous affranchissons des dispersions qui peuvent apparaître sur les différentes voies du système de pilotage de l'antenne. Enfin, seules les mesures des fonctions de transfert H_{mp} et H_{Qm} sont requises.

6 Conclusion

L'utilisation d'une antenne synthétique pour simuler l'effet d'une couche limite turbulente a été présentée. La méthodologie proposée repose en premier lieu sur la décomposition en ondes planes décorréliées du champ de pression pariétale généré par une couche limite turbulente. Chacune des ondes ainsi obtenue est alors décomposée sur une base de monopoles acoustiques. Une étude numérique a permis de déterminer la valeur des principaux paramètres de l'antenne. Nous avons ainsi pu observer qu'il fallait au moins quatre monopoles par longueur d'onde à reconstruire, que la taille de l'antenne devait être supérieure ou égale à celle de la paroi et enfin, qu'il n'était pas nécessaire d'être dans le champ proche de la structure pour reconstruire correctement l'effet d'une couche limite turbulente. Une expérience simulée numériquement a ensuite montré la capacité de la méthode à reconstruire la réponse vibratoire d'une structure excitée par une couche limite turbulente. Enfin, le principe de l'antenne synthétique a été présenté. Ce concept s'appuie sur la linéarité des phénomènes mis en jeu et permet de n'utiliser qu'une seule source que l'on déplace spatialement. Son principal avantage est de diminuer considérablement les

ressources matérielles nécessaires, tout en permettant de former une antenne constituée d'un grand nombre de monopoles, qui serait pratiquement irréalisable autrement.

Références

- [1] Fahy F.J., "On simulating the transmission through structures of noise from turbulent boundary layer", *Journal of Sound and Vibration* 3 (1), 57-81 (1966)
- [2] Robert G., "Modélisation et Simulation du champ exciteur induit sur une structure par une couche limite turbulente", *Thèse, Ecole Centrale de Lyon* (1984)
- [3] Bravo T., Maury C., "The experimental synthesis of random pressure fields : Methodology", *J. Acoust. Soc. Am.* 120 (5), 2702-2711 (2006)
- [4] Maury C., Bravo T., "The experimental synthesis of random pressure fields : Practical feasibility", *J. Acoust. Soc. Am.* 120 (5), 2712-2723 (2006)
- [5] Corcos G.M., "The resolution of pressures in turbulence", *J. Acoust. Soc. Am.* 35, 192-199 (1963)
- [6] Chase D.M., "Modeling the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure", *Journal of Sound and Vibration* 70, 29-67 (1980)
- [7] Strawderman W.A., Brand R.S., "Turbulent-Flow-Excited Vibration of a Simply Supported, Rectangular Flat Plate", *J. Acoust. Soc. Am.* 45 (1), 177-192 (1969)

Annexe : Calcul de la réponse d'une plaque excitée par une CLT à partir d'une antenne de monopoles

Pour déterminer la réponse de la plaque excitée par une couche limite turbulente simulée à partir d'une antenne de monopoles, nous utilisons un modèle déterministe de plaque appuyée. La plaque, modélisée à partir de l'équation de mouvement de Love-Kirchhoff, est dans un premier temps excitée par une onde plane $P_{rs}(x, y, \omega) = A(k_r, k_s) e^{-jk_r x - jk_s y}$.

Une décomposition modale est alors utilisée pour résoudre l'équation de mouvement. Nous obtenons ainsi l'équation (14), donnant la vitesse de la plaque excitée par une onde plane P_{rs}

$$v_{rs}(x_q, y_q, \omega) = j\omega \sum_n \frac{P_n^{rs} \phi_n(x_q, y_q)}{M_n (\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta_n \omega \omega_n)} \quad (14)$$

où ω_n est la fréquence propre, $\phi_n(x_q, y_q)$ la déformée modale au point $Q(x_q, y_q)$, η_n le coefficient d'amortissement modal. Les expressions de la masse généralisée et de la force généralisée M_n et P_n^{rs} sont données par l'équation (15) :

$$\begin{cases} M_n = \int_{S_p} m \phi_n(x, y)^2 dS_p \\ P_n^{rs} = \int_{S_p} P_{rs}(x, y) \phi_n(x, y) dS_p \end{cases} \quad (15)$$

En injectant l'équation (9) dans l'expression de la force généralisée, nous obtenons la force généralisée due à l'antenne de monopoles.

$$P_n^{rs} = \sum_m B_m^{r,s} \left[\int_{S_p} H_{mp}(x, y, x_m, y_m, z_m) \phi_n(x, y) dS_p \right] \quad (16)$$

A partir des réponses de la plaque excitée par chaque onde plane que l'on cumule de manière décorrélée, nous obtenons l'autospectre de vitesse $S_{vv}(x_q, y_q, \omega)$ au point $Q(x_q, y_q)$ de la plaque, ou vitesse quadratique de la plaque $v^2(x_p, y_p, \omega)$, donnée par l'équation (17)

$$S_{vv}(x_q, y_q, \omega) = v^2(Q, \omega) = \sum_{r,s} |v_{rs}(x_q, y_q, \omega)|^2 \quad (17)$$

L'équation (17) est équivalente à l'équation (13), en remarquant que :

$$H_{Qm} = j\omega \sum_n \frac{\bar{P}_n^{rs} \phi_n(x_q, y_q)}{M_n (\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta_n \omega \omega_n)} \quad (18)$$

avec $\bar{P}_n^{rs} = \int_{S_p} H_{mp}(x, y, x_m, y_m, z_m) \phi_n(x, y) dS_p$