

Représentation de Sommerfeld du Champ Monopolaire Réfléchi par une Couche Poreuse

Jean-Francois Allard

LAUM, Avenue Olivier Messiaen, F-72085 Le Mans, Cedex 9, allardjfl@aol.com

Des expressions approchées, telle la formulation de Chien et Soroka, sous différentes versions, sont d'usage courant pour l'évaluation du champ monopolaire réfléchi par une couche poreuse. La version initiale de Chien et Soroka est obtenue sous l'hypothèse d'un matériau à réaction locale dont l'impédance ne varie pas avec l'angle d'incidence. Cette impédance constante est soit remplacée par l'impédance en incidence normale, soit l'impédance sous incidence spéculaire. L'inconvénient de toutes ces versions est qu'elles ne sont valables que dans des domaines limités dépendant de la géométrie source-récepteur-surface réfléchissante, et des propriétés de la couche poreuse. Les domaines sont difficiles à préciser à cause de la multiplicité des paramètres concernés. La formulation de Chien et Soroka peut être obtenue à partir de la formulation de Sommerfeld qui est exacte pour les couches poreuses acoustiquement axisymétriques par rapport à la normale à leur surface. Il paraît donc plus sûr d'utiliser cette représentation dans de nombreux cas pratiques où la géométrie du problème permet de l'utiliser sans aucune difficulté de calcul. Des exemples illustrent l'intérêt de ce choix et permettent d'en préciser le domaine d'application.

1 Introduction

La géométrie du problème est représentée en Fig. 1. La source est représentée en S et le récepteur en M. L'angle de réflexion spéculaire est θ_0 . Les longueurs r , R_1 , R_2 sont définies sur la figure 1. La pression totale en M est la somme de la pression directe $\exp(ik_0 R_2)/R_2$ ou k_0 est le nombre d'onde dans l'air et la pression réfléchie p_r . Soit Z_0 l'impédance caractéristique de l'air et k_0 le nombre d'onde dans l'air. La pression réfléchie p_r a pour expression exacte dans la représentation de Sommerfeld [1,2]

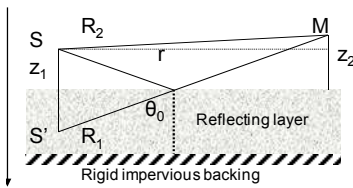


Figure 1 La source S et le récepteur M au dessus de la surface poreuse.

$$p_r = i \int_0^\infty \xi d\xi V(\varphi) J_0(r\xi) \exp[i\mu(z_1 + z_2)] / \mu \quad (1)$$

ou V est le coefficient de réflexion pour un angle d'incidence φ ,

$$V(\varphi) = (Z_s(\varphi) - Z_0 / \cos \varphi) / (Z_s(\varphi) + Z_0 / \cos \varphi) \quad (2)$$

Dans ces équations $\mu = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}$, $\text{Im} \mu \geq 0$, φ est défini par $\cos \varphi = \mu / k_0$, $Z_s(\varphi)$ est l'impédance de la surface poreuse pour l'angle d'incidence φ .

A partir de la représentation de Sommerfeld, si l'impédance Z_s ne dépend pas de l'angle d'incidence et si le pôle du coefficient de réflexion à θ_p défini par

$$\cos \theta_p = -Z_0 / Z_s \quad (3)$$

est tel que θ_p est proche de θ_0 , il est possible en utilisant la méthode de la soustraction du pôle d'obtenir la représentation de Chien et Soroka [3] pour la pression réfléchie

$$p_r = [V(\theta_0) + (1 - V(\theta_0))F(w)] \exp(ik_0 R_1) / R_1 \quad (4)$$

$$F(w) = 1 + i\sqrt{\pi} w \exp(w^2) \text{erfc}(-w) \quad (5)$$

$$w = i(0.5ik_0 R_1)^{1/2} [\cos \theta_0 + Z_0 / Z_s] \quad (6)$$

Cette approximation n'est valable que sous les conditions $k_0 R_1 \gg 1$, $\cos \theta_0 \ll 1$, $Z_0 / |Z_s| \ll 1$. Toutes ces conditions sont satisfaites pour des milieux à forte résistivité, pour lesquels l'impédance varie faiblement avec l'angle d'incidence, et si $r \gg |z_1|$, $r \ll |z_2|$. Les équations (4)-(6) sont couramment utilisées en dehors de ces conditions. Des tentatives d'adaptation du modèle de Chien et Soroka ont été faites pour le cas de surfaces dont l'impédance de surface varie notablement avec l'angle d'incidence. Initialement l'impédance utilisée dans les équations (4)-(6) était l'impédance sous incidence normale, et actuellement on utilise plutôt l'impédance sous l'incidence θ_0 [4,5]. Ainsi, l'équation (6) est remplacée par l'équation (7)

$$w = i(0.5ik_0 R_1)^{1/2} [\cos \theta_0 + Z_0 / Z_s(\theta_0)] \quad (7)$$

Nous montrerons dans ce qui suit que l'usage de la représentation de Chien et Soroka ainsi modifiée peut conduire à de grossières erreurs dans l'évaluation de la pression réfléchie dans des situations où la représentation de Sommerfeld fournit facilement des résultats précis.

2 Utilisation de la représentation de Sommerfeld

L'intégrale dans l'équation (1) présente un intervalle d'intégration semi-infini et une singularité apparente à $\mu = 0$. La singularité disparaît quand on utilise comme variable d'intégration μ à la place de ζ . D'autre part quand $\xi \rightarrow \infty$ l'argument de l'intégrale tend vers 0 avec l'exponentielle et la fonction de Bessel. La limite supérieure pour la troncation de l'intervalle d'intégration dépend principalement de $z_1 + z_2$. Il est possible de tester la précision de l'intégration en posant $V = 1$ et en comparant le résultat avec $\exp(ik_0 R_1) / R_1$. Pour des distances radiales r jusqu'à une dizaine de mètres et la somme des élévations de la source et du récepteur de l'ordre de 20 cm la simple intégration par la méthode des trapèzes permet d'obtenir des résultats précis. Pour des distances radiales de l'ordre du mètre, la somme des élévations peut être réduite à 1 cm.

3 Comparaisons des évaluations obtenues avec les représentations de Sommerfeld et de Chien et Soroka

Ces comparaisons permettent de tester la précision des évaluations effectuées avec la représentation de Chien et Soroka, la représentation de Sommerfeld fournissant des résultats très proches des valeurs exactes.

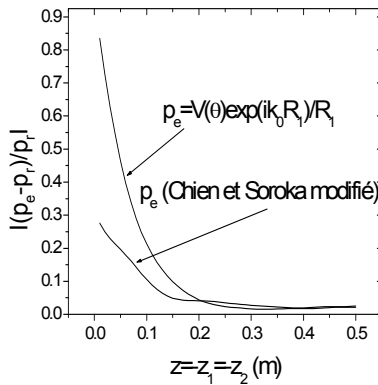


Figure 2 Valeur absolue de l'erreur relative sur p_r avec les évaluations de Chien et Soroka et sans correction de sphéricité.

La distance radiale $r = 0.5\text{m}$ et le poreux a une faible résistivité acoustique, $\sigma = 4000\text{Nm}^{-4}\text{s}$ et une épaisseur de 2 cm. La fréquence est 2 kHz. L'estimation de Chien et Soroka est meilleure que l'estimation sans correction de sphéricité. La précision est médiocre avec l'estimation de Chien et Soroka sauf quand la correction de sphéricité est faible. Il apparaît donc que pour les petites distances radiales et pour les petites élévations de source et de récepteur, la formulation de Chien et Soroka doit être évitée. Il a été montré [2] que pour ces géométries il existait des cas où une formulation de Chien et Soroka modifiée, nécessitant la connaissance de certains pôles du coefficient de réflexion, pouvait être utilisée.

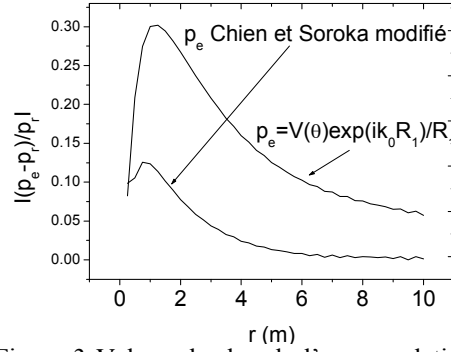


Figure 3 Valeur absolue de l'erreur relative sur p_r avec l'évaluation de Chien et Soroka et sans correction de sphéricité. Elévation de la source et du récepteur: 10 cm.

Dans le second exemple, la distance radiale varie de 0.25 m à 10 m et les hauteurs de source et de récepteur sont égales à 10 cm. Le même matériau poreux est utilisé à 2 kHz. De faibles fluctuations apparaissent dans les quantités représentées pour les distances radiales supérieures à 6 m. Ces fluctuations correspondent à une légère imprécision dans l'évaluation de l'intégrale dans la représentation de Sommerfeld. Il apparaît que l'estimation de Chien et Soroka est très proche de la pression réfléchie exacte pour les grandes distances radiales. Ce résultat a une justification théorique. Pour les grandes distances, la quantité w de l'équation (6) est suffisamment grande pour que $F(w)$ de l'équation (5) puisse être remplacée par son expression asymptotique. D'autre part pour de grandes distances radiales et une faible élévation de la source et du récepteur, l'angle de réflexion spéculaire θ_0 est proche de $\pi/2$, V peut être remplacé par -1, et la pression réfléchie p_r dans la représentation de Chien et Soroka devient

$$p_r = \frac{\exp(ik_0 R_1)}{R_1} \left[V(\theta_0) + \frac{2i(Z_s(\theta_0)/Z_0)^2}{k_0 R_1} \right] \quad (8)$$

Cette expression coïncide avec celle que l'on peut obtenir par la méthode du col à partir de la représentation de Sommerfeld.

4 Conclusion

Les exemples traités l'ont été en utilisant la méthode d'intégration la plus élémentaire et en fortran simple précision. Avec ces moyens mathématiques limités quelques tendances ont été mises en évidence. Pour les petites distances radiales l'emploi de la formulation de Chien et Soroka peut conduire à des erreurs considérables et doit être évitée surtout pour les faibles élévations de la source et du récepteur, alors que la représentation de Sommerfeld peut être facile d'emploi. Pour les grandes distances radiales, la formulation de Chien et Soroka peut donner d'excellents résultats alors que l'intégrale dans la formulation de Chien et Soroka devient plus difficile à évaluer. Un traitement plus performant de l'intégrale dans la représentation de Sommerfeld devrait permettre une extension du domaine d'utilisation de cette représentation au delà de la zone d'utilisation des exemples présentés.

Références

- [1] Brekhovskikh L.M. and Godin O.A., *Acoustics of Layered Media II, point source and bounded beams*, Springer, New York, (1992)
- [2] Allard J.F. and Atalla N., *Propagation of Sound in Porous Media, Modelling Sound Absorbing Materials*, Wiley Chichester, U K (2009)
- [3] Chien C.F. and Soroka W.W., "Sound propagation along an impedance plane", *J. Sound Vib.* 43, 9-20 (1975)
- [4] Nicolas J., Berry J.L., and Daigle G.A., "Propagation of sound above a layer of snow", *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 67-73 (1985)
- [5] Li K.M., Waters-Fuller T., and Attenborough K., "Sound propagation from a point source over extended-reaction ground", *J. Acoust. Soc. Am.* 104, 679-685 (1988)