

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Relations de dispersion pour des chaînes linéaires comportant des interactions harmoniques auto-similaires

Thomas Michelitsch¹, Gérard Maugin¹, Franck Nicolleau², Andrzej Nowakowski², Shahram Derogar³

¹ Institut Jean le Rond d'Alembert, CNRS UMR 7190, UPMC (Paris 6), 4 Place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05 {michel.gam}@lmm.jussieu.fr

² Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield, Royaume-Uni, {a.f.nowakowski, f.nicolleau}@sheffield.ac.uk

³ Department of Civil and Structural Engineering, University of Sheffield, Royaume-Uni, s.derogar@sheffield.ac.uk

Dans de nombreux systèmes biologiques on trouve des structures arborescentes et bifurquantes comme les arbres, les fougères, les escargots, le système vasculaire, etc. Tous ces systèmes se distinguent par une invariance d'échelle et se comportent donc quasiment comme des systèmes auto-similaires. Est-ce par soucis d'optimisation qu'une telle symétrie a été retenue par la nature ? Quels sont les comportements dynamiques et acoustiques de tels systèmes auto-similaires ? Afin de donner une réponse il faut tout d'abord comprendre le rôle de l'auto-similarité dans les comportements dynamiques comme la propagation d'ondes. Faute d'approches définitives qui décrivent la physique de systèmes auto-similaires, nous introduisons un modèle simple d'une chaîne linéaire quasiment continue ayant une distribution auto-similaire de ressorts qui relie des masses ponctuelles. Dans notre modèle la densité d'énergie élastique est une fonction exactement auto-similaire. L'équation du mouvement fournit une version auto-similaire de l'opérateur de Laplace dont le spectre des valeurs propres (la relation de dispersion) est une fonction de type Weierstrass-Mandelbrot. Cette fonction est exactement auto-similaire et est de plus une fonction fractale non-différentiable.

En outre, il s'avère que dans le cas limite d'un milieu continu notre Laplacien adopte la forme d'intégrales fractionnaires. Dans ce cas la densité de vibrations révèle une loi de puissance pour les basses fréquences avec un exposant strictement positif qui indique l'annulation de la densité de vibrations à la fréquence zéro. Pour de plus amples détails nous renvoyons le lecteur à notre article récent [2].

1 Introduction

Ce fut dans les années soixante-dix du siècle dernier que Benoît Mandelbrot déclencha une révolution scientifique en développant sa *Géométrie Fractale* [1]. Toutefois, les origines de cette discipline remontent au moins jusqu'au 19ème siècle [3]. Depuis lors, les applications des structures fractales se développent de plus en plus, citons par exemple les antennes fractales [4, 5]. En outre, des réseaux de type Sierpinski révèlent des caractéristiques vibratoires intéressantes [6].

Tandis que les systèmes fractals et auto-similaires sont déjà un sujet d'études bien établi dans de nombreux domaines de la physique, ils suscitent aussi de plus en plus d'intérêt en mécanique analytique et dans les sciences de l'ingénieur. Il faut se rendre compte qu'il y a encore une large méconnaissance de l'impact de l'auto-similarité en tant que symétrie sur les comportements physiques. Bien que quelques pas initiaux ont d'ores et déjà été effectués [6, 7, 8, 9, 10, 11], le développement d'une *mécanique fractale* se fait attendre. Faute d'une théorie définitive, on cherche à établir des modèles de systèmes auto-similaires qui soient à la fois pertinents et autant que possible simples à analyser. L'objectif de cet article est précisément de développer un tel modèle.

2 Le modèle auto-similaire

2.1 Définition du problème

Avant de présenter le modèle physique, il nous faut détailler quelques notions-clés que nous avons introduites. Un système physique (dynamique) qui présente un comportement spatial "auto-similaire" dispose de fonctions caractéristiques (comme p. ex. son Hamiltonien) qui reflètent cette propriété comme symétrie d'échelle. Afin de prendre en compte l'auto-similarité dans un modèle physique, il nous faut définir ce que veut dire "auto-similaire". Nous disons que ϕ est une fonction auto-similaire si elle satisfait [2]

$$\phi(Nh) = N^\delta \phi(h) \quad (1)$$

pour tout $h > 0$, mais uniquement pour une valeur de $N > 1 \in \mathbb{R}$ donnée (et par conséquent pour toutes les puissances entières N^s , $s \in \mathbb{Z}_0$). Nous appelons (1) le problème "affine" dont ϕ constitue une solution à trouver. Une solution de (1) peut être construite ainsi

$$\phi(h) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} f(N^s h) \quad (2)$$

où f est n'importe quelle fonction pourvu que la série (2) converge. Il convient parfois d'écrire (2) de manière

plus compacte, soit

$$\phi(h) = \hat{T}_N(h)f(h) \quad (3)$$

où $\hat{T}_N(h)$ est un opérateur auto-similaire qui est défini par

$$\hat{T}_N = \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} \hat{A}_N^s \quad (4)$$

avec

$$\hat{A}_N f(h) =: f(Nh) \quad (5)$$

L'opérateur (4) remplit lui aussi la condition d'auto-similarité $\hat{A}_N \hat{T}_N = N^\delta \hat{T}_N$. Nous soulignons le fait que nous pouvons nous restreindre aux cas $N > 1$ ($N \in \mathbb{R}$) et exclure le cas pathologique $N = 1$.

Il est important de préciser pour quelles fonctions $f(t)$ la série (2) est convergente. On montre qu'une fonction $f(t)$ est admissible, si elle se comporte comme ($t > 0$) [2]

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a_0 t^\alpha \quad (6)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c_\infty t^\beta \quad (7)$$

où a_0, c_∞ sont des constantes non nulles ou des fonctions de t dont les valeurs absolues sont bornées pour tout $t > 0$. Les deux exposants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ peuvent prendre des valeurs réelles, positives ou négatives avec $\beta < \alpha$. Pour une telle fonction $f(t)$, la fonction $\phi(h)$ de (2) est convergente et donc existe si l'exposant δ est tel que

$$\beta < \delta < \alpha \quad (8)$$

Le cas $\beta = 0$ comprend des fonctions bornées $|f(t)| < M$ qui incluent les fonctions périodiques.

Si on construit une solution du problème affiné comme en (2) on se rend compte que le problème (1) n'a pas de solution unique comme la considération suivante le démontre. En posant

$$h = N^u = N^{n+\chi} \quad (9)$$

où $n = \text{floor}(u) \in \mathbb{Z}_0$ et $u = \frac{\ln h}{\ln N}$. La fonction $\text{floor}(u)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à u . Il s'ensuit qu'on peut poser $u = \text{floor}(u) + \chi(u)$ avec $0 \leq \chi(u) < 1$ le reste non-entier, qui est égal à 0 si u est un entier, et positif dans le cas contraire.

Avec cette relation (presque banale) il s'ensuit que nous pouvons écrire une fonction $\phi(h)$ respectant (1) sous la forme

$$\phi(h) = \phi(N^n N^\chi) = N^{\delta n} \phi(N^\chi), \quad 0 \leq \chi < 1 \quad (10)$$

Cette relation peut être réécrite, en utilisant $N^n = hN^{-\chi}$, sous la forme

$$\phi(h) = h^\delta N^{-\delta \chi} \phi(N^\chi), \quad 0 \leq \chi < 1 \quad (11)$$

Il s'ensuit que toutes les valeurs de $\phi(h)$ peuvent être reconstruites pour les valeurs de ϕ dans l'intervalle $1 \leq N^\chi < N$ (puisque $0 \leq \chi < 1$). Autrement dit : une fonction $\phi(h)$ remplissant (1) est uniquement définie par ses valeurs dans l'intervalle $1 \leq h < N$ et peut être reconstruite par (11). Suite à cette observation nous précisons le problème comme suit :

Il existe une fonction $\phi(h)$ unique qui respecte (1) (avec $N > 1$ et $\delta \in \mathbb{R}$ donnés fixes) et qui prend dans l'intervalle $1 \leq \tau < N$ des valeurs prescrites par une fonction $v(\tau)$ quelconque

$$\phi(\tau) = v(\tau), \quad 1 \leq \tau < N \quad (12)$$

La solution unique de ce problème est pour, tout $h > 0$, reconstruite à partir de ses valeurs (12) en utilisant (11)

$$\phi(\tau) = h^\delta N^{-\delta \chi} v(\tau), \quad 1 \leq \tau = N^\chi < N \quad (13)$$

Nous soulignons que l'ajout de (12) à la condition d'auto-similarité (1) rend sa solution unique. Nous pouvons également l'exprimer à l'aide d'une série (2) en introduisant la fonction $v(\tau)$ non nulle uniquement dans l'intervalle $1 \leq \tau < N$. Nous pouvons donc écrire

$$\phi(h = N^n \tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} v(N^{s+n} \tau) \quad (14)$$

où seul le terme $s = -n$ est non nul. La série prend donc la forme

$$\phi(h) = N^{\delta n} v(\tau) = h^\delta N^{-\delta \chi} v(\tau) \quad (15)$$

en accord avec (13). Cette inférence démontre bien qu'il y a une solution $\phi(h)$ unique pour notre problème "affiné", alors qu'il n'y a ni une série (2) unique pour représenter $\phi(h)$ ni une fonction unique f pour la construire. C'est à dire que la solution unique $\phi(h)$ ne donne pas de fonction unique f pour engendrer (2). Autrement dit : L'opérateur auto-similaire introduit ci-dessus (4) et qui engendre la série (2) n'est pas inversible. Avant de nous consacrer au modèle physique d'une chaîne linéaire auto-similaire, d'après les définitions données dans ce paragraphe, nous remarquons que la simplicité de leur genèse ne permet pas de conclure quant aux comportements simples de ces fonctions. C'est notamment vrai en ce qui concerne le comportement en quelque sorte "sauvage" de (15) dans le cas limite $h \rightarrow 0$. Sans présenter plus de détails on se rend facilement compte que, pour $\delta \leq 1$, la fonction $\phi(h)$ de (15) n'est pas différentiable par rapport à h en $h = 0$.

3 Le modèle physique

Grace à la manière simple de construire des fonctions auto-similaires on est capable de cerner l'influence de l'auto-similarité dans la dynamique du système. Dans le modèle de la chaîne linéaire proposé dans [2], l'auto-similarité est introduite à partir de l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{u}^2(x, t) + \mathcal{V}(x, t, h)) dx \quad (16)$$

En se référant à (2) l'énergie élastique $\mathcal{V}(x, t, h)$ est construite de la manière suivante¹

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t, h) = & \frac{1}{2} \hat{T}_N(h) [(u(x, t) - u(x + h, t))^2 \\ & + (u(x, t) - u(x - h, t))^2] \end{aligned} \quad (17)$$

1. Le facteur supplémentaire 1/2 évite un double comptage.

où $\hat{T}_N(h)$ est l'opérateur auto-similaire (4).

L'énergie élastique remplit donc la condition d'auto-similarité par rapport à h , soit

$$\hat{A}_N(h)\mathcal{V}(x, t, h) = \mathcal{V}(x, t, Nh) = N^\delta \mathcal{V}(x, t, h) \quad (18)$$

Le fait que l'énergie élastique est une quantité finie entraîne l'exigence de la convergence de (17). On en déduit que l'exposant δ doit vérifier la contrainte [2]

$$0 < \delta < 2 \quad (19)$$

Pour établir (19) on a également utilisé le fait que $u(x, t)$ est Fourier-transformable. La condition (19) détermine l'intervalle où l'énergie élastique (17) est définie. L'équation de mouvement s'obtient par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\delta H}{\delta u} \quad (20)$$

(où $\delta/\delta u$ indique une dérivée fonctionnelle) soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} \left\{ 2u(x, t) \right. \\ &\quad \left. - u(x + hN^s, t) - u(x - hN^s, t) \right\} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta_{(\delta, N, h)} u(x, t) \end{aligned} \quad (21)$$

où $\Delta_{(\delta, N, h)}$ désigne un Laplacien auto-similaire.

Il semble que cette approche puisse constituer le point de départ d'une théorie générale de la propagation d'ondes dans des milieux auto-similaires.

Le but est ensuite de déterminer la relation de dispersion obtenue à partir des valeurs propres (négatives) du Laplacien semi-négatif défini dans (21). On utilise le fait que le champ $u(x, t)$ est Fourier-transformable et que la fonction exponentielle e^{ikx} est fonction propre du Laplacien. En écrivant

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k, t) e^{ikx} dk \quad (22)$$

on en déduit que les amplitudes de Fourier $\tilde{u}(k, t)$ satisfont

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(k, t) = -\bar{\omega}^2(k) \tilde{u}(k, t) \quad (23)$$

On obtient donc avec $\bar{\omega}^2(k) = \omega^2(kh)$ la relation de dispersion

$$\omega^2(kh) = 4 \sum_{s=-\infty}^{\infty} N^{-\delta s} \sin^2\left(\frac{khN^s}{2}\right) \quad (24)$$

La série (24) décrit une fonction de type *Weierstrass-Mandelbrot* qui est continue et qui est pour $0 < \delta \leq 1$ non-différentiable [1, 16]. La fonction de Weierstrass-Mandelbrot satisfait toujours la condition d'auto-similarité (24), soit

$$\omega^2(Nkh) = N^\delta \omega^2(kh) \quad (25)$$

sur la totalité de son intervalle de convergence (19).

On souligne le fait que seuls les exposants δ situés dans l'intervalle (19) sont admissibles pour que l'Hamiltonien défini par (16) constitue un problème bien posé. Il a été démontré par Hardy [16] que si

$$0 < \delta < 1 \quad (26)$$

alors la fonction de Weierstrass-Mandelbrot (24) est aussi une courbe *fractale* de dimension fractale $D = 2 - \delta > 1$ (dimension de Hausdorff). Les figures 2-4 montrent les courbes de dispersion pour des valeurs décroissantes de δ dans l'intervalle $0 < \delta < 1$. On observe que la décroissance de δ induit une croissance de la dimension fractale D . Plus la dimension fractale augmente, de la figure 2 à la figure 4, plus le comportement des courbes devient ératique. Dans la figure 4, la dimension fractale $D = 1.9$ est déjà près de la dimension 2 du plan. Par contre, la figure 1 correspond avec $\delta = 1.2$ à un cas non-fractal.

Afin d'évaluer (24) approximativement il convient de remplacer la série par une intégrale en utilisant l'approximation quasi-continue (en supposant $N = 1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ étant suffisamment petit, avec $\epsilon \approx \ln N$). Dans le cadre de cette approximation on trouve pour $|k|h$ suffisamment "petit" ($h > 0$), c'est à dire en basses fréquences, que

$$\omega^2(kh) \approx \frac{(h|k|)^\delta}{\epsilon} C \quad (27)$$

où $(|k|h)^\delta$ doit être de l'ordre de grandeur de ϵ ou plus petit. La relation de dispersion est donc caractérisée, dans la limite des basses fréquences, par une loi de puissance de la forme $\bar{\omega}(k) \approx \text{Const} |k|^{\delta/2}$. La constante C qui est introduite dans (27) est donnée par l'intégrale

$$C = 2 \int_0^\infty \frac{(1 - \cos \tau)}{\tau^{1+\delta}} d\tau \quad (28)$$

laquelle existe uniquement si δ est dans l'intervalle (19). Dans ce cas limite, on obtient la densité modale par [2]

$$\rho(\omega) = 2 \frac{1}{2\pi} \frac{d|k|}{d\omega} \quad (29)$$

qui est normalisée de sorte que $\rho(\omega)d\omega$ compte le nombre de modes oscillants, c'est à dire la multiplicité des ondes qui se propagent à une certaine fréquence, laquelle se trouve dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$. On obtient également pour la densité une loi de puissance sous la forme

$$\rho(\omega) = \frac{2}{\pi\delta h} \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\delta}} \omega^{\frac{2}{\delta}-1} \quad (30)$$

où δ est toujours dans l'intervalle (19). On observe donc que la puissance $\frac{2}{\delta} - 1$ est restreinte à l'intervalle $0 < \frac{2}{\delta} - 1 < \infty$ pour $0 < \delta < 2$. En particulier, on trouve l'annulation de la densité pour une fréquence nulle $\rho(\omega \rightarrow 0) = 0$. On ose penser que ce comportement, de même que la loi d'échelle de la forme (30), est une caractéristique fondamentale des systèmes dynamiques sans échelles valide bien au-delà du présent modèle.

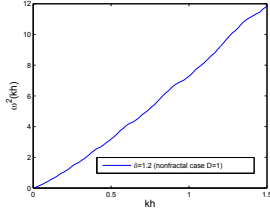


FIGURE 1 – Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 1.2$

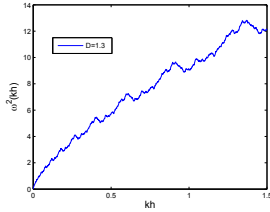


FIGURE 2 – Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.7$

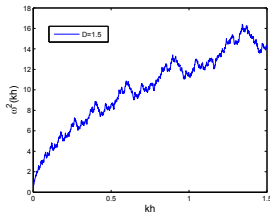


FIGURE 3 – Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.5$

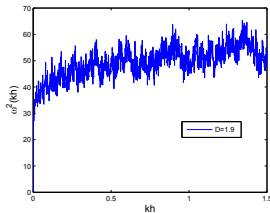


FIGURE 4 – Relation de dispersion $\omega^2(kh)$ en unités arbitraires avec $N = 1.5$ et $\delta = 0.1$

4 Conclusion

Nous avons construit des fonctions et des opérateurs ayant des propriétés auto-similaires en utilisant des fonctions classiques. Par cette méthode il est possible de construire une sorte de Laplacien auto-similaire et par suite l'opérateur d'Alembertien. A l'aide de cet outillage on en déduit une équation du mouvement qui décrit la propagation d'ondes dans une chaîne auto-similaire. Nous pensons que ce modèle est l'un des plus simples qui prenne en compte l'aspect auto-similaire d'un milieu. En outre on a démontré dans [2] la correspondance entre notre modèle et le calcul fractionnaire [9] afin d'aborder des problèmes physiques de propagation d'ondes dans des milieux fractals.

Nous espérons que notre modèle pourra fournir un point de départ pour une théorie plus générale de la propagation d'ondes dans des milieux auto-similaires et fractals.

Remerciements

Les auteurs sont reconnaissants à J.-M. Conoir pour des discussions stimulantes.

Références

- [1] B.B. Mandelbrot, *Fractals, Form, Chance, and Dimension* (Springer, New York, 1978).
- [2] T.M. Michelitsch, G.A. Maugin, F.C.G.A Nicolleau, A.F. Nowakowski, S. Derogar, Phys. Rev. E **80**, 011135 (2009); (e-prints : hal-00371945, arXiv :0904.0780).
- [3] E.E. Kummer : J. Reine Angew. Math. **44**, 93 (1852).
- [4] N. Cohen, Commun. Q. **5**(3), 7 (1995).
- [5] S. Hohlfield, N. Cohen, Fractals, **7**(1), 79 (1999).
- [6] A.N. Bondarenko, V.A. Levin, The 9th Russian-Korean International Symposium 2005 (unpublished) pp. 33-35.
- [7] J. Kigami, Japan J. Appl. Math. **6**(2), 259 (1989).
- [8] V.E. Tarasov, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 035101 (2008).
- [9] M. Ostoja-Starzewski, ZAMP **58**, 1085 (2007).
- [10] J.C. Claussen, J. Nagler, H.G. Schuster, Phys. Rev. E **70**, 032101 (2004).
- [11] M. Epstein, S.M. Adeeb, Int. J. Solids Struct. **45**(11-12), 3238 (2008).
- [12] T.M. Michelitsch, G.A. Maugin, A.F. Nowakowski, F.C.G.A Nicolleau, Int. J. Eng. Sci. **47**(2), 209 (2009).
- [13] K. Ghosh, R. Fuchs, Phys. Rev. B **44**, 7330 (1991).
- [14] J.A.C. Humphrey, C.A. Schuler, B. Rubinsky, Fluid dynamics research **9** (1-3), 81, ISSN 0169-5983 (1992).
- [15] F.C.G.A. Nicolleau, Contribution à la modélisation de la dispersion en milieu turbulent. Habilitation à diriger des recherches, L'École Centrale de Lyon (2009).
- [16] G.H. Hardy, Trans - Amer. Math. Soc., **17**, 301 (1916).