



Using a boundary element method to validate the concept of an active anechoic multicellular layer

T. Nicolas

Université Saint-Joseph, Campus des Sciences et Technologies, Faculté D'Ingénierie - ESIB,
11072050 Beyrouth, Lebanon
tony.nicolas@usj.edu.lb

In previous paper we propose the concept of an active anechoic multicellular layer. This layer wraps the body of a submarine and the animation of this layer with an adequate algorithm makes the submarine anechoic to incidental sonar plane waves. To validate this concept we sent a plane wave to a flat square layer, then we animated this latter with the adequate algorithm described above, and deduce the conditions that made the layer anechoic. At this level, and based on the deduced conditions, we calculated the field radiated in space using the boundary element method. In this article, we describe the process of the calculation, the formal calculation of the singular integrals, and we present the results that validate the concept of the active anechoic multicellular layer we propose.

1 Introduction

Dans un précédent article [1], nous avons proposé le concept d'une couche anéchoïque multicellulaire linéaire. Cette couche, basée sur une architecture informatique dédiée, couvrira une surface donnée et son animation par un algorithme adéquat rendra cette dernière anéchoïque pour les ondes planes incidentes.

Dans la suite, nous faisons un bref retour sur la théorie de la couche anéchoïque. Nous présentons les opérateurs linéaires associés à cette couche.

Ensuite, nous exposons les champs diffracté et rayonné par une plaque mince en utilisant la méthode des équations intégrales.

Nous proposons ensuite la méthodologie du calcul de l'opérateur lié au calcul du champ rayonné et/ou diffracté.

Nous terminons par un test de validation relatif à l'ombre derrière une plaque attaquée par une onde plane.

2 Retour sur la théorie de la couche anéchoïque

2.1 Condition générale d'anechoïcité

Considérons un objet O au contact d'un fluide qui occupe le volume Ω . Ce dernier et l'objet O ont une partie de frontière commune $\partial\Omega$.

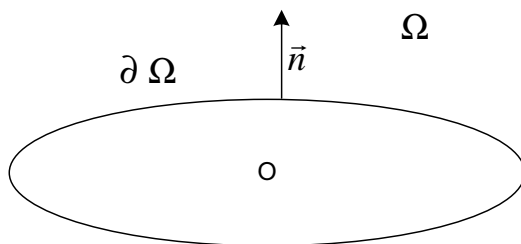


Figure 1 : Objet O de frontière $\partial\Omega$ immergé dans un fluide infini

On cherche à trouver le mouvement à donner à cette frontière pour que la présence de l'objet ne perturbe pas un champ acoustique p^0 nommé dans la suite champ primaire.

Supposons que O est complètement immergé dans un fluide fini. Alors le champ p^0 est solution de l'équation de propagation acoustique Eq. (1), avec un second membre s :

$$\frac{\partial^2 p^0}{\partial t^2} - c^2 \Delta p^0 = 0 \text{ dans le domaine } \Omega \quad (1)$$

Notons p^A la modification du champ acoustique due à la présence de l'objet. Supposons que la surface de celui-ci parfaitement réfléchissante et animée de l'accélération normale γ_n . La pression totale $p^0 + p^A$ est donc solution du système Eq. (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(p^0 + p^A) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (p^0 + p^A)}{\partial t^2} = s \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial (p^0 + p^A)}{\partial n} + \rho \gamma_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (2)$$

En utilisant l'équation (1), on obtient la formulation du problème aux limites dont le champ acoustique additionnel p^A doit être solution.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p^A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^A}{\partial n} = -\frac{\partial p^0}{\partial n} - \rho \gamma_n \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (3)$$

L'objet O est, par définition anéchoïque, si la solution de du système (3) est $p^A = 0$. Par suite la condition générale d'anechoïcité est :

$$\frac{\partial p^A}{\partial n} = -\frac{\partial p^0}{\partial n} - \rho \gamma_n \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4)$$

Cette condition s'étend s'étende à d'autres situations différentes d'un corps totalement immergé.

2.2 Champ diffracté et champ rayonné

Le système (4) est linéaire en sorte que la solution p^A dépend linéairement du second membre, ce que nous écrivons sous la forme :

$$p^A = \mathcal{M} \left(\frac{\partial p^0}{\partial n} + \rho \gamma_n \right) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5)$$

Où \mathcal{M} est un opérateur linéaire, indépendant du temps, et dont l'argument et la valeur sont des champs scalaires définis sur $\partial\Omega$. On nommera :

- "champ diffracté" : p^D
- "champ rayonné" : p^R

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} p^D = \mathcal{M} \frac{\partial p^0}{\partial n} \\ p^R = \mathcal{M} \rho \gamma_n \end{array} \right\} \quad (6)$$

2.3 Cas où le champ primaire est une onde plane

Lorsque le champ primaire p^0 est une onde plane, nous obtenons la condition d'anechoïcité [1]

$$v_n = -\frac{p^0}{\rho c} \cos(\theta) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7)$$

Où $\theta = (u, n)$ désigne l'angle d'incidence de l'onde plane sur $\partial\Omega$.

2.4 Les deux opérateurs du problème

Dans l'article [1] nous avons proposé le concept d'une couche anéchoïque multicellulaire linéaire. Cette couche animée par un algorithme linéaire qu'on va nommer \mathfrak{K} , et exécuté par l'électronique répartie, fait correspondre à un champ de pression pariétale p un champ de vitesse normale v_n :

$$v_n = \mathfrak{K} p \text{ sur } \partial\Omega \quad (8)$$

Comme l'opérateur \mathcal{M} l'opérateur \mathfrak{K} est un opérateur linéaire, indépendant du temps, et dont l'argument et la valeur sont des champs scalaires définis sur $\partial\Omega$. Le réseau d'hydrophone, disposé sur la couche capte la pression totale : $P^T = p^0 + p^D + p^R$.

En résumé le système est soumis à l'équation de contrôle (7) appliqué sur la pression totale P^T et à l'équation de diffraction-rayonnement :

$$p^T = p^0 + \mathcal{M} \frac{\partial p^0}{\partial n} + \mathcal{M} \left(\rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) \quad (9)$$

Pour les deux inconnus p^T et v_n . On note que les opérateurs \mathcal{M} et \mathfrak{K} , indépendants du temps, commutent avec $\frac{\partial}{\partial t}$.

En éliminant l'inconnue v_n entre les équations (8) et (9) on obtient l'équation pour la pression rayonné p^R :

$$\rho \mathcal{M} \mathfrak{K} \frac{\partial p^R}{\partial t} - p^R = - \rho \mathcal{M} \mathfrak{K} \left(\frac{\partial p^0}{\partial t} + \frac{\partial p^D}{\partial t} \right) \quad (10)$$

Avec dans le cas de l'étude temporelle, la condition initiale $p^R(0)=0$.

Dans la suite, nous nous contentons d'évaluer la représentation fréquentielle de l'opérateur \mathcal{M} .

3 Diffraction et rayonnement d'une plaque mince

Considérons l'objet O (Figure 1) immergé dans un fluide homogène au repos. Sa paroi est animée d'un mouvement donné. On cherche à évaluer, dans l'espace Ω ainsi que sur $\partial\Omega$ le champ de pression rayonné. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (11)$$

Où g est une fonction connue, k le nombre d'onde. Au système précédent il convient de rajouter la condition de rayonnement de Sommerfeld qu'on peut écrire sous la forme :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial n} - ikp \right) = 0 \quad (12)$$

L'opérateur \mathcal{M} introduit au paragraphe 2.4 est celui qui résout, pour une plaque infiniment mince, le problème aux limites (11) auquel on rajoute la condition (12). Pour ce faire on considère une plaque mince d'épaisseur d et on fait tendre d vers 0. Le calcul de la pression se base [2,3] sur l'étude de la discontinuité de l'opérateur laplacien, au sens des distributions, à la traversée de $\partial\Omega$. On obtient :

$$\left\{ p(x) = \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS(y) \right\} \quad (13)$$

Où $\sigma(y)$ présente le saut de la pression à travers $\partial\Omega$. Le noyau de Green est donné par :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow G(x,y) = \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \quad (14)$$

Le calcul de la valeur de σ sur $\partial\Omega$ doit se faire à partir de la seule information en notre possession. La valeur de la dérivée normale de p sur $\partial\Omega$. D'où en calculant :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{grad}_x \left(\int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS(y) \right) \cdot n \quad (15)$$

Cette limite sous la réserve de son existence est appelée partie finie de Hadamard et notée indifféremment :

$$\oint_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) = \text{P.F.} \left(\int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) \right)$$

Le problème à résoudre est alors:

$$\oint_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} dS(y) = g(x) \quad (16)$$

L'opérateur $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y}$ croît en $\frac{1}{\|x-y\|^3}$ lorsque x tend vers y . Donc l'équation (16) doit être interprétée au sens des distributions en lui donnant une formulation variationnelle[2].

4 Calcul de l'opérateur μ

4.1 Formulation variationnelle

On considère dans la suite, la plaque dans le plan xOy et e_3 suivant oz . Alors en posant :

$$G_h(x,y) = G(x + he_3, y)$$

L'équation (15) peut s'écrire sous la forme :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(y) \frac{\partial^2 G_h(x,y)}{\partial x_3 \partial y_3} dS(y) = g(x) \quad (17)$$

Dont on cherche une solution nulle sur le bord de $\partial\Omega$ [2]. On considère alors la forme bilinéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \sigma, \tau \\ A(\sigma, \tau) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \iint_{\substack{y \in \partial\Omega \\ x \in \partial\Omega}} \sigma(y) \tau(x) \frac{\partial^2 G_h(x,y)}{\partial x_3 \partial y_3} dS(y) \end{array} \right\} \quad (18)$$

Qui s'expriment finalement [2] sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\sigma, \tau) = \\ \iint_{\substack{(x,y) \\ \in \partial\Omega \times \partial\Omega}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y_1}(y) \frac{\partial \tau}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial y_2}(y) \frac{\partial \tau}{\partial x_2}(x) \right) G(x,y) \\ - (k^2 \sigma(y) \tau(x) G(x,y)) dS(y) dS(x) \end{array} \right\}$$

Posons

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{x \in \partial\Omega} g(x) \tau(x) dS(x)$$

Le problème consiste alors à trouver σ telque [2] :

$$A(\sigma, \tau) = \langle \sigma, \tau \rangle \quad (19)$$

4.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

La résolution de l'équation (19) se base sur une méthode de type élément finis [4]. On considère un maillage régulier de la plaque carrée par des éléments quadrilatères carrés 4 nœuds de continuité C^0 . La discrétisation de la formulation variationnelle pose un problème d'ordre numérique, il s'agit de l'évaluation du noyau singulier en $\frac{1}{\|x-y\|}$ quand les points x et y appartiennent au même élément de discrétisation ou bien à des éléments d'intersection non vide. Un calcul numérique en utilisant les points de Gauss permet d'évaluer les contributions des éléments éloignés.

4.3 Algorithme standard de résolution

Si on considère acquise les contributions des éléments d'intersection non vide. L'équation (20) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{\alpha\} = [F]\{s\} \quad (20)$$

Où $[K]$ est la matrice élémentaire construite par l'assemblage des matrices élémentaires. $[F]$ désigne la matrice des sollicitations et s les valeurs nodales de ces sollicitations. L'algorithme de construction s'écrit :

```
Initialiser les matrices [K] et [F] à zéro
Pour m parcourant [1..NbElement] faire
  Chercher les nœuds de  $El_m$ 
  Ajouter la contribution de  $El_m$  à [F]
  Pour n parcourant [1..NbElement] faire
    Chercher les nœuds de  $El_n$ 
    Ajouter la contribution de la matrice
    Élémentaire  $[K]_{m,n}$  à [K]
  Fin Pour
Fin Pour
```

Où les matrices élémentaires $[K]_{m,n}$ sont des matrices carrées de dimensions 4×4 , ces matrices sont construites pour un couple d'éléments (El_m , El_n) par la formule suivante (21), où φ_p représente la fonction test sur le nœud p de l'élément:

$$[K]_{m,n} \rightarrow \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial \varphi_p(y)}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi_q(x)}{\partial x_1} e^{ik\|x-y\|} \\ + \\ \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial \varphi_p(y)}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_q(x)}{\partial x_2} e^{ik\|x-y\|} \\ - \\ \int_{El_m} \int_{El_n} \frac{1}{\|x-y\|} k^2 \varphi_p(y) \varphi_q(x) e^{ik\|x-y\|} \end{pmatrix}$$

4.4 Calcul semi-analytique des intégrales singulières

Le calcul des contributions des matrices élémentaires des éléments ayant une intersection non vide ne pose pas de problèmes numériques. Lorsque les éléments possèdent une intersection non vide, nous

proposons, dans la suite, une démarche de calcul formel, en utilisant Mathematica [5] qui permet de lever les singularités apparentes. Nous nous plaçons dans l'espace de référence [4], nous fixons, formellement, un point (ξ, η) dans le premier élément de référence qui devient l'origine, (ξ', η') se balade dans le second élément, et nous effectuons formellement le changement de variables suivant dans l'équation (21).

$$\begin{cases} \xi - \xi' = r \cos \theta \\ \eta - \eta' = r \sin \theta \end{cases}$$

Le fait d'avoir fixé (ξ, η) , permet de déterminer les domaines de variations de r et θ en fonction de (ξ, η) . Ensuite nous intégrons analytiquement par rapport à (r, θ) les différents termes de l'équation (21). Cette première intégration absorbe la singularité apparente en $\frac{1}{\|x-y\|}$ et donne une fonction de (ξ, η) . Le résultat final s'obtient par intégration numérique de cette fonction par la méthode des points de Gauss dans un espace de dimensions 2.

4.5 Valeur numérique de l'opérateur μ

La densité du potentiel double couche est solution du problème :

$$[K]\{\sigma\} = [F]\{s\} \quad (22)$$

Où $\{s\}$ représente les valeurs nodales de la dérivée normale de la pression sur la plaque. On cherche à exprimer la pression $\{p\}$, sur la plaque, sous la forme :

$$\{p\} = [\mathcal{M}] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} \quad (23)$$

D'où la définition de l'opérateur \mathcal{M} par :

$$[\mathcal{M}] = \frac{1}{2} [K]^{-1} [F] \quad (24)$$

Le calcul de la pression rayonnée dans l'espace s'effectue alors facilement à partir de l'équation (13).

5 Test de validation : ombre derrière une plaque d'une onde plane

5.1 Aspects théoriques

Considérons une plaque immobile dans le plan $x_1 O x_2$. La normale est dirigée suivant l'axe x_3 . Eclairons cette plaque par une onde plane p^0 en provenance de $-\infty$. La pression p^0 exercée par cette onde plane vaut :

$$p^0(x) = e^{ikx_3}$$

Où k est le nombre d'onde. La dérivée normale de p^0 suivant x_3 est :

$$\frac{\partial p^0}{\partial x_3}(x) = ik$$

Du point de vue physique, la configuration ainsi décrite créera une zone d'ombre derrière la plaque (pour les $x_3 > 0$) et des ventres et des nœuds de pressions pour les $x_3 < 0$). La pression totale p est donnée par :

$$p = p^0 + p^R$$

Où p^R est la pression réfléchiée par la plaque. La dérivée normale doit vérifier pour les $x_3 = 0$ l'égalité suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x) = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial p^R}{\partial x_3} = -\frac{\partial p^0}{\partial x_3}(x) = -ik$$

L'idée du test est de recréer les zones décrites précédemment par l'intermédiaire de l'opérateur \mathcal{M} . En

effet, considérons uniquement la plaque vibrante animée d'un mouvement définie par :

$$\frac{\partial p^R}{\partial x_3} = -ik$$

Cette plaque va rayonner dans l'espace un champ p^R , la méthode des équations intégrales fournit la densité de potentiel double couche σ mise en jeu par :

$$\{\sigma\} = 2[\mathcal{M}]\{-ik\}$$

Et la formule (13) fournit le champ de pression rayonné par la plaque. La pression totale est calculée en sommant la pression incidente due à l'onde plane et la pression rayonnée due au mouvement de la plaque.

5.2 Paramètres numériques et résultats

Nous présentons dans la suite l'exemple d'une plaque carrée de 6.8 m de côté. La longueur d'onde choisie est $\lambda = 1.7\text{ m}$. Les éléments finis sont identiques et de taille $0.2 \times 0.2\text{ m}^2$. Nous avons choisi de prendre 6 éléments par longueur d'onde. La plaque a été maillée avec $68 \times 68 = 4624$ éléments.

La figure suivante montre le module de la densité du potentiel double couche :

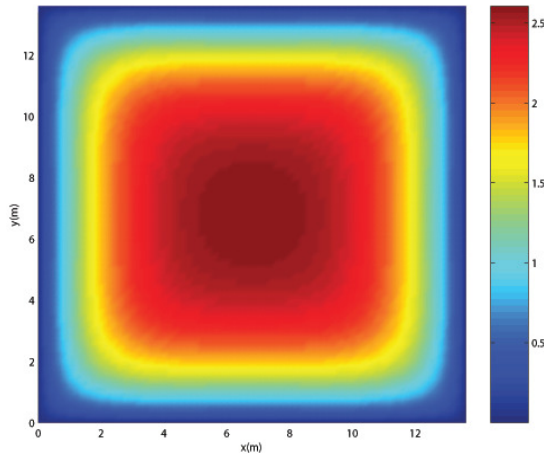


Figure 1: Module de la densité de potentiel double couche

Le module du champ primaire vaut toujours 1, nous montrons dans les figures suivantes le module du champ totale (champ primaire + champ rayonné) dans un plan perpendiculaire à la plaque en son milieu pour les $x_3 > 0$ et $x_3 < 0$ respectivement.

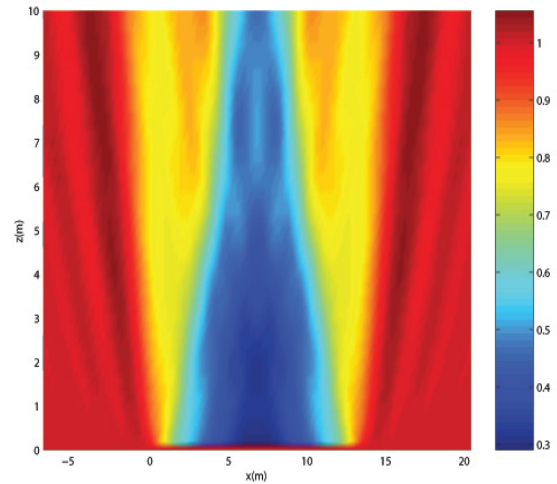


Figure 2: Coupe des isobars dans un plan vertical pour les $x_3 > 0$

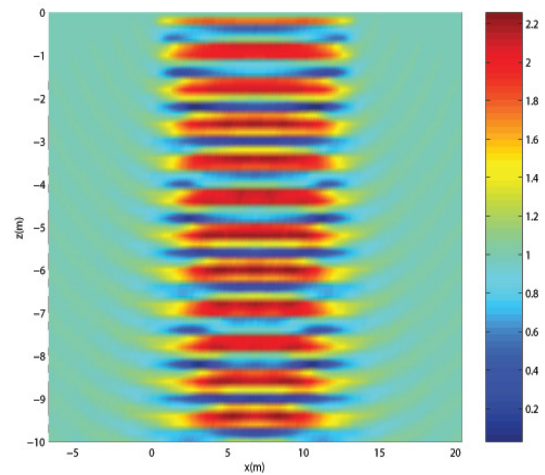


Figure 3: Coupe des isobars dans un plan vertical pour les $x_3 < 0$

Nous constatons dans les figures précédentes l'apparition, comme attendu, des zones prédites.

6 Conclusion

L'apparition des zones d'ombres, des ventres et des nœuds de pression d'une part et d'autre de la plaque a validé la démarche suivie. Cependant ceci a nécessité la prise de quelques précautions. En effet, nous avons choisi une plaque dont le côté est de 8 fois la longueur d'onde incidente. Pour bien capter le phénomène nous avons choisi 6 éléments par longueur d'onde. Ce qui nous a ramenée à 4761 degré de liberté et à la manipulation de matrices pleines de grande taille (stockée sur 181 Mo), d'où le besoin de passer au calcul parallèle distribué.

Nous constatons, du point de vue physique, des bons résultats. La validation finale de l'approche doit se faire en comparant les résultats avec ceux d'une solution analytique, ou des solutions fournies par des logiciels du marché ou par d'autres méthodes.

Notre démarche a nécessité la réalisation de l'état "embryonnaire" d'un mini logiciel de calcul formel, sous

Mathematica, capable d'évaluer non seulement les valeurs numériques des intégrales singulières, mais également les matrices élémentaires correspondantes. Ce logiciel a été réalisé pour des éléments carrés mais son extension à tout type d'éléments ne fait, à nos yeux, aucun doute.

Pour terminer, le calcul de l'opérateur \mathbf{K} de la couche doit être réalisé en fréquentiel, et une simulation complète du couplage de la couche anéchoïque avec les équations intégrales sera le sujet d'une prochaine publication.

Références

- [1] Tony Nicolas "Conception d'une couche anéchoïque multicellulaire linéaire", *actes du 10^{ème} congrès Français d'Acoustique, Lyon 10-12 Avril 2010*
- [2] M.A. Hamdi Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains. Thèse de doctorat d'état en sciences. Université de Technologie de Compiègne, année 1981.
- [3] F. Rodier Distributions et transformations de Fourier. Université de Nice. McGraw-Hill. 1991.
- [4] G.Dhatt G. Touzot E. Lefrançois Méthode des éléments finis. Hermes Lavoisier. 2005.
- [5] S. Wolfram. Le système informatique pour les mathématiques, mai 1995. Aubin imprimeur, Ligugé, Poitiers.