



ACOUSTICS 2012

Quadratic approximation in focusing with linear arrays

P. Cervenka

CNRS UMR 7190, UPMC (P6) Institut Jean le Rond d'Alembert, 2, place de la gare de
ceinture, 78210 Saint-Cyr-L'Ecole, France
pierre.cervenka@upmc.fr

Imaging systems based on linear arrays with delay-and-sum beamforming require estimating the path differences between each pixel and the array elements. Considering the quadratic approximation, the linear part is related to the steering direction whereas the quadratic term refers to the curvature of the wavefront. The several ways for handling this approximation are presented, e.g., closest second order development for each pixel, paraxial development, Fresnel approximation, down to the Fraunhofer (linear) approximation. The domains of validity of these developments are scarcely described in the literature. They are estimated here by considering the largest error encountered on the array in the path differences. The quadratic approximation is usually considered as not enough efficient in terms of either the computation savings, or the extent of the domains of validity. It is shown that settings of practical interest can be found by optimizing the quadratic coefficient as a function of range. This procedure yields the computation saving of the paraxial approximation, still keeping quite large angular domains of validity. The solutions are conveniently displayed with general graphs where ranges are counted in array lengths, and array lengths are given in wavelength units.

1 Introduction

On s'intéresse à la focalisation en un point quelconque de l'espace avec un réseau linéaire fonctionnant autour d'une fréquence caractéristique. La symétrie de résolution autour de l'axe du réseau permet de limiter l'étude à une géométrie en 2D, en se plaçant dans un plan contenant le réseau. Notant (O, x, y) un repère de ce plan, le réseau de longueur L est centré sur l'origine O , et orientée selon l'axe y , l'axe x étant normal au réseau. Le point focal \mathbf{r} est défini par ses coordonnées polaires (r, θ) . La distance focale r est du même ordre de grandeur que la dimension L de l'antenne notamment dans le domaine de la microscopie acoustique (par exemple en contrôle non destructif des matériaux), ou celui de l'imagerie sonar par ouverture synthétique où $r = \rho L$ avec $\rho \gg 1$ dans la partie proche de la trajectoire du porteur.

Pour focaliser en \mathbf{r} , l'antenne doit compenser en chacun de ses points d'abscisse y la différence de marche $d = r_y - r$, où r_y est la distance entre le point focal et le point d'abscisse y sur l'antenne (Fig. 1).

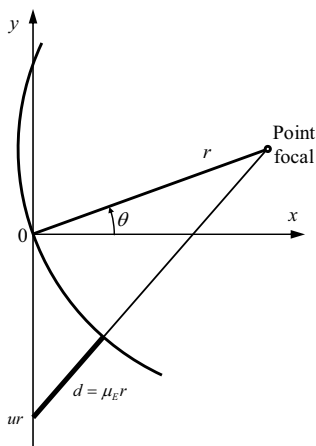


Figure 1. Différences de marche associées à une antenne linéaire focalisée.

L'approximation quadratique, dont l'approximation de Fresnel est un exemple, donne une expression approchée de ces différences de marche. On s'intéresse aux limites de validité que conditionnent les biais sur les temps de vol introduits par ce type d'approximation. La méthode utilisée consiste à évaluer l'amplitude maximale, relativement à la longueur d'onde, de l'excursion sur l'antenne de l'écart entre la solution exacte et l'approximation. Dans la configuration axiale ($\theta = 0$), il suffit de calculer l'écart à une extrémité de l'antenne où celui-ci est maximal, l'écart étant nul et mini-

mal au centre de l'antenne. Cependant, ce résultat classique n'est pas applicable dans le cas général. On établit ici rigoureusement les solutions correspondant à l'approximation quadratique considérée. Ces solutions sont ensuite exploitées pour construire des abaques livrant directement les domaines de validité (on n'a pas trouvé de représentations correctes dans la littérature). On montre aussi qu'il est possible de définir une implémentation de l'approximation quadratique qui simplifie la prise en compte de la courbure (en fonction de la portée), tout en maximisant la largeur du domaine de validité autour de l'axe principal x . En formation d'image, cette simplification présente un intérêt car elle permet de réduire d'un ordre de grandeur le nombre des opérations à effectuer pour focaliser.

L'approximation quadratique la plus précise du calcul des différences de marche, i.e., déduite du développement au second ordre pour chaque point focal, est étudiée Section 2. Son domaine de validité y est établi pour chaque antenne caractérisée par sa longueur comptée en longueurs d'onde, l'espace des points focaux étant dimensionné par la longueur de l'antenne. Section 3 traite le développement au premier ordre, i.e., l'approximation de Fraunhofer. Des variantes de l'approximation quadratique, notamment l'approximation de Fresnel, font l'objet de la Section 4. La Section 5 développe la variante où la contribution du terme au second ordre est figée pour chaque portée, l'objectif étant d'élargir au maximum le secteur accessible avec cette approximation en optimisant ce terme. La pertinence du domaine de validité est confirmée en cartographiant les caractéristiques comparées des fonctions d'étalement du point (position du maximum, intensité et largeur) entre la focalisation exacte et l'approximation quadratique optimisée.

2 Différences de marche exactes et approximation quadratique stricte

Pour étudier l'évolution des différences de marche le long de l'antenne, on utilise l'abscisse sans dimension $u = y/r$. La différence de marche exacte sans dimension μ_e , représentée Fig. 2, s'écrit :

$$\mu_e = r^{-1}d = \sqrt{1 - 2u \sin \theta + u^2} - 1. \quad (1)$$

Pour une direction quelconque θ du point focal, les différences de marche en fonction de u décrivent des hyperboles symétriques par rapport à l'abscisse $u = \sin \theta$ où la valeur minimale ($\mu_e = \cos \theta - 1 < 0$) est atteinte.

Nous étudions ici l'approximation quadratique issue du développement de (1) en u , jusqu'à l'ordre u^2 inclus :

$$\mu_Q = -u \sin \theta + \frac{1}{2} u^2 \cos^2 \theta. \quad (2)$$

Le terme linéaire prend en compte le dépointage, et le terme quadratique la courbure. L'hyperbole exacte μ_E est ainsi approchée par une parabole. L'ajustement s'effectue à l'origine, i.e. au centre de l'antenne. La courbure y est notamment égale à celle que l'on obtient avec la focalisation exacte, quel que soit l'angle de dépointage θ .

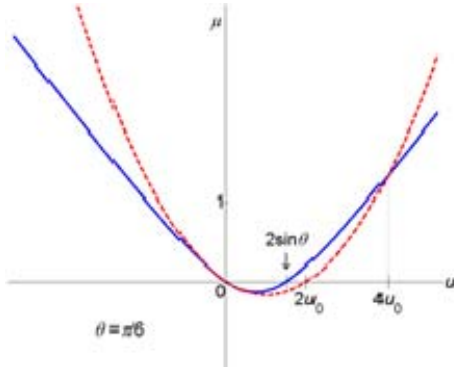


Figure 2. Différence de marche μ en fonction de l'abscisse u sur l'antenne ($\theta = \pi/6$); Traits pleins bleus : solution exacte (μ_E) ; Tirets rouges : approximation de quadratique (μ_Q)

On note $\Delta_Q = \mu_Q - \mu_E$ l'écart entre l'approximation quadratique et les différences de marche exactes (Fig. 3). La limite de l'approximation quadratique est dictée par l'excursion maximale δ_Q de l'écart Δ_Q sur l'antenne (Fig. 4) :

$$\delta_Q(r^{-1}L, \theta) = \left(\max \Delta_Q(u, \theta) - \min \Delta_Q(u, \theta) \right) \Big|_{u \in [-r^{-1}L/2, r^{-1}L/2]}. \quad (3)$$

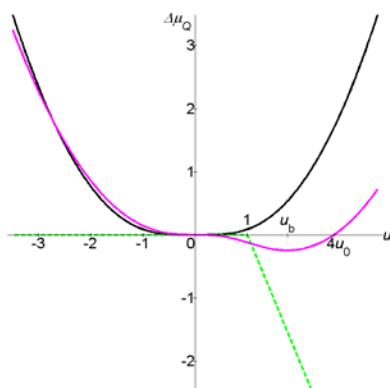


Figure 3. Ecart Δ_Q introduit par l'approximation quadratique. Noir : mode axial ; Magenta : cas général ; Vert : end fire array.

On observe graphiquement dans toutes les situations que Δ_Q est proche de zéro dans la région centrale de l'antenne (Δ_Q et ses dérivées première et seconde sont nulles à l'origine). En mode axial, l'excursion cherchée (3) est l'écart calculé à une extrémité de l'antenne ($\delta_Q \approx (r^{-1}L/2)^4/4$

quand $L < r$), mais cette estimation n'est pas correcte pour une direction quelconque de focalisation.

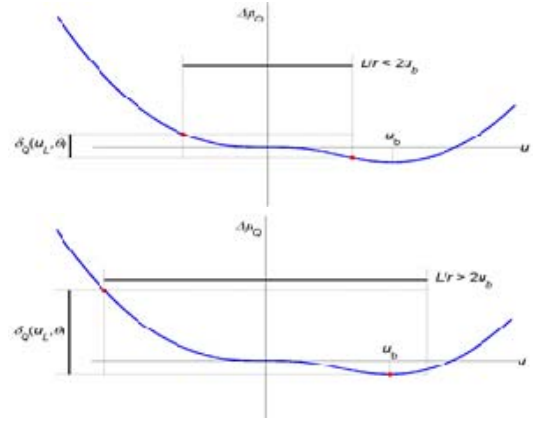


Figure 4. Excursion maximale δ_Q de l'écart Δ_Q sur l'antenne.

Les limites de validité de l'approximation quadratique sont établies en fixant un seuil pour l'amplitude δ_Q de la forme $\delta_Q = r^{-1} \alpha \lambda / 4$, où λ note la longueur d'onde et α est un coefficient arbitraire de l'ordre de l'unité. Ainsi, le déphasage des contributions des différents points de l'antenne au champ construit au point focal ne dépasse jamais $\alpha\pi/2$, sachant que ce déphasage est beaucoup plus faible sur toute la portion centrale de l'antenne. Pour construire un abaque, on utilise les nouvelles variables sans dimension suivantes :

$$\rho = r/L, \quad w = L/\lambda \quad (4)$$

La largeur réduite w_Q de l'antenne qui obéit à la condition de validité est cartographiée (Fig. 5) dans l'espace physique des points focaux. On observe que l'approximation quadratique est beaucoup plus restrictive en focalisation oblique qu'axiale. On montre que la direction qui réduit au maximum la taille de la plus grande antenne admissible (en longueurs d'onde) se stabilise autour de 35° dès que la distance focale dépasse quelques longueurs d'antenne (voir pointillés et asymptote Fig. 5). L'évolution de la taille de l'antenne admissible le long de cette ligne ($\rho, \theta_m(\rho)$) est présentée Fig. 6 (tirets). Sa valeur asymptotique, $w_Q(\rho > 1, \theta_m) \approx 3\sqrt{3}\alpha\rho^2$ est une excellente approximation même si $\rho \gg 1$.

En focalisation axiale, on a

$$w_Q(\theta = 0) = 2\alpha\rho \left(8\rho^2 + 4\rho\sqrt{4\rho^2 + 1} + 1 \right)^{(\rho>1)} \approx 32\alpha\rho^3 \quad (5)$$

Dans la plupart des domaines d'application de l'imagerie acoustique (ASM, NDT, ...), la longueur des antennes dépasse rarement la centaine de longueurs d'onde ($n \leq 7$). L'approximation quadratique est donc le plus souvent applicable pour une focalisation axiale étonnamment proche de l'antenne ($< 2L$) (trait plein Fig. 6). En revanche, cette distance peut être sensiblement plus grande selon la direction de focalisation (tirets Fig. 6). On observe aussi sur la Fig. 5 que la supériorité de la focalisation axiale est rapidement dégradée, même pour de faibles déviations angulaires.

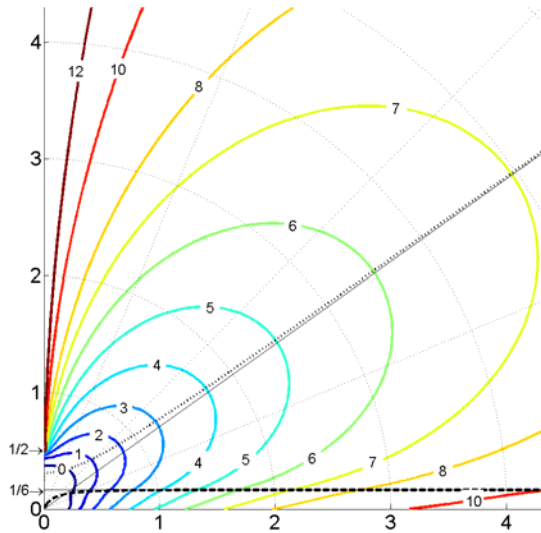


Figure 5. Limites de l'approximation quadratique (calculées avec $\alpha=1$). Le plan est l'ensemble des points focaux (ρ, θ) en coordonnées polaires, la distance r à l'origine O étant comptée en longueurs d'antenne L , i.e. $\rho = r/L$. L'antenne linéaire est centrée à l'origine, et s'étend des ordonnées $-1/2$ à $+1/2$. Les lignes de contour notées n correspondent à des longueurs maximales admissibles de l'antenne, comptées en longueurs d'onde, exprimées en unités logarithmiques, i.e. $w_Q = L_{\max}/\lambda = 2^n$.

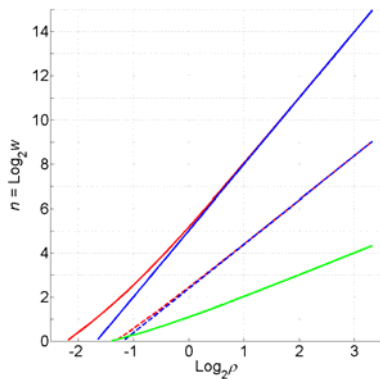


Figure 6. Taille maximale de l'antenne ($w=L/\lambda=2^n$), fonction de la distance focale réduite $\rho = r/L$ (unités logarithmiques), pour laquelle les approximations sont valides. Traits pleins : focalisation axiale (rouge : approx. quadratique ; vert : Fraunhofer) ; Tirets : approx. quadratique selon la direction de focalisation la plus défavorable (35°) ; Droites bleues : asymptotes des approx. quadratiques.

En mode axial, la limite de validité de l'approximation quadratique est élémentaire à établir. Elle est simplement dictée par le premier terme omis, du quatrième ordre, du développement au second ordre. Pour un dépointage et une distance de focalisation suffisants, il est plus ou moins intuitif de quantifier la limite de validité en s'appuyant sur le seul terme du troisième ordre, puisque le terme suivant devient en comparaison négligeable. La transition entre les deux régimes est toujours restée dans le flou. Nous avons effectué ici une analyse fondée sur le même critère que celui qui est implicitement usité ailleurs, à savoir l'excursion maximale sur l'antenne de l'écart entre les différences de marche exactes et approchées. Mais en se conformant ici strictement à ce critère, on peut établir rigoureusement les

équations (non présentées ici) avec lesquelles sont construits les abaques et courbes présentés Figs. 5-6. Sur le plan pratique, il suffit donc de se reporter à ces figures.

3 Approximation de Fraunhofer

Avec l'approximation de Fraunhofer, la courbure des fronts d'onde incidents est négligée. L'estimation des différences de marche se réduit au terme linéaire en u qui dicte le dépointage dans la direction θ :

$$\mu_\infty = -u \sin \theta. \quad (6)$$

L'amplitude δ_∞ de l'écart sur l'antenne est donnée par l'écart (négatif) à l'extrémité située du côté du dépointage. Cependant, dès que ρ est suffisamment grand, l'extrémité choisie pour le calcul n'est plus différenciée, et le domaine de validité (Fig. 7) est simplement déduit du premier terme omis du développement, i.e. le terme du second ordre, soit

$$\rho_\infty \approx (\alpha^{-1} w \cos^2 \theta) / 2, \quad (7)$$

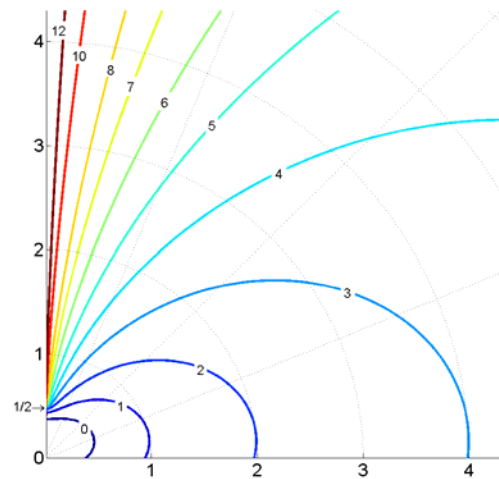


Figure 7. Limites de l'approximation de Fraunhofer

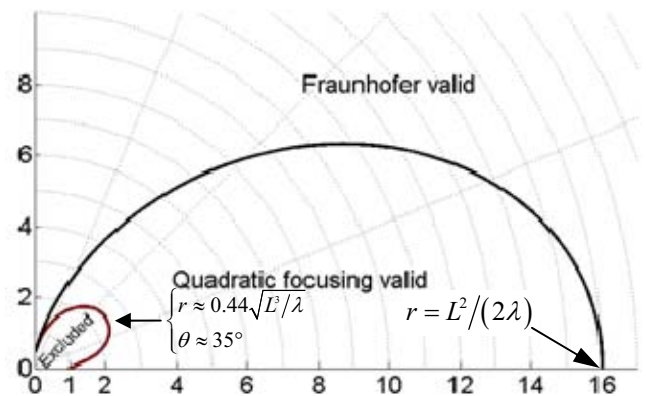


Figure 8. Zones où les approximations (2) et (6) sont pertinentes ($\alpha=1$) Exemple d'une antenne de longueur $L = 32\lambda$. Quand l'approximation de Fraunhofer est valide, l'approximation quadratique l'est toujours aussi, bien que l'application de celle-ci soit alors à éviter (car plus coûteuse). La portée maximale du domaine d'exclusion de l'approximation quadratique stricte est atteinte dans la direction $\theta \approx 35^\circ$. Sur l'axe ($\theta=0^\circ$), l'approximation de Fraunhofer est valide à partir de $\rho \approx w/2$.

Les contours à dimension w constante d'antenne ne sont pas des arcs de cercle centrés à l'origine (en contradiction avec [1]). L'approximation (7) calculée sur l'axe est plus connue sous la forme dimensionnée définissant la distance :

$$D_F (= \rho L) = (L \cos \theta)^2 / (2\alpha\lambda), \quad (8)$$

qui met logiquement en évidence l'ouverture apparente $L \cos \theta$ de l'antenne vue depuis la direction θ .

L'approximation du second ordre (2) est toujours bien meilleure que l'approximation de Fraunhofer (Fig 8).

3 Autres approximations

3.1 Approximation quadratique axiale

En figeant la courbure sur celle qui correspond à une focalisation axiale, l'approximation quadratique devient :

$$\mu_x = -u \sin \theta + u^2 / 2. \quad (9)$$

En régime harmonique, cela revient à reconstruire un point $(x_F = r \cos \theta, y_F = r \sin \theta)$ en considérant l'évolution de phase sur l'antenne donnée, à une constante près, par

$$\varphi_{(x_F, y_F)}(y) = \pi (y - y_F)^2 / (\lambda r). \quad (10)$$

L'amplitude de la variation de l'écart sur l'antenne est systématiquement obtenue avec l'écart à l'extrémité de l'antenne opposée à la direction visée, i.e. $\delta_x = \Delta_x (-r^{-1} L/2)$.

La cartographie des tailles d'antenne maximales en découle directement (Fig. 9). La solution sur l'axe est identique à (5), i.e., $w_x(\theta = 0) = w_Q(\theta = 0) \approx 32\alpha\rho^3$ quand $\rho > 1$.

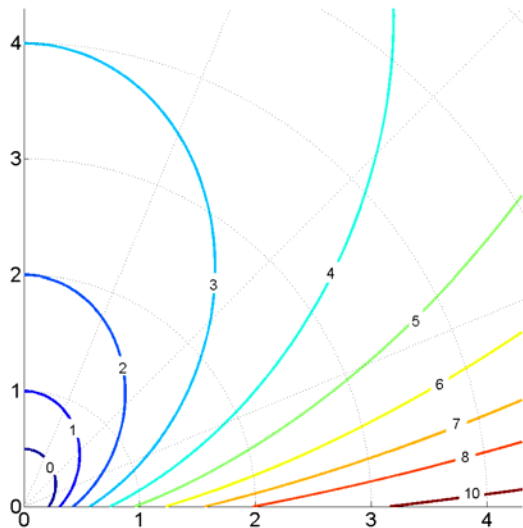


Figure 9. Limites de l'approximation (9).

La situation est maintenant très différente de l'approximation quadratique stricte (2). Il devient plus avantageux d'appliquer simplement l'approximation de Fraunhofer dans des directions suffisamment hors axe, qu'effectuer une focalisation avec une courbure qui n'est adaptée que pour la région paraxiale. On peut montrer qu'une excellente ap-

proximation de la limite optimale entre les deux régimes est la diagonale $\theta = \pi/4$ sur laquelle on a.

$$w \approx w_\infty \approx 4\alpha\rho \quad (11)$$

Considérant une antenne de directivité w^{-1} donnée, l'approximation (9) n'est donc pertinente que dans le domaine limité latéralement par la courbe dont l'extrémité sur l'axe Ox se situe approximativement à l'abscisse $\rho = \sqrt[3]{w/32}$ (5), et limité en portée par la condition de Fraunhofer $\rho < \alpha^{-1} w \cos^2 \theta / 2$, cette frontière s'ouvrant sur 45° avec la portée $w/2$ sur l'axe, et la portée $w/4$ à 45° (Fig. 10).

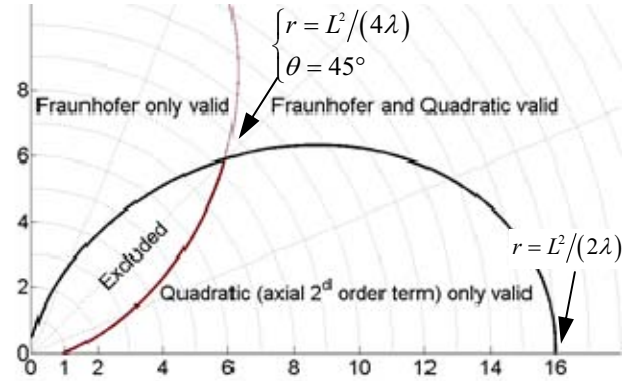


Figure 10. Zones où les approximations de Fraunhofer (6) et quadratique (9) sont pertinentes ($\alpha = 1, L = 32\lambda$)

3.2 Approximation de Fresnel

L'approximation de Fresnel est une approximation paraxiale adaptée au traitement analytique par plans, i.e. à x_F constant (e.g., [2]). Un point (x_F, y_F) est reconstruit en considérant l'évolution de phase sur l'antenne donnée, à une constante, par

$$\varphi_{(x_F, y_F)}(y) = \pi (y - y_F)^2 / (\lambda x_F), \quad (12)$$

Avec les notations précédentes, cette approximation s'écrit

$$\mu_F = -u \tan \theta + u^2 / (2 \cos \theta). \quad (13)$$

ce qui donne finalement les courbes de niveau (accessibles analytiquement) reproduites Fig. 11, à comparer avec Fig. 10. La limite axiale est identique à (5). Les directions asymptotiques sont telles que

$$\alpha w^{-1} / 4 = \tan \theta - \sin \theta \Rightarrow \theta \xrightarrow{w \gg 1} \sqrt[3]{\alpha w^{-1} / 2} \quad (14)$$

Comparée à l'approximation quadratique (9), la direction du dépointage dictée par le terme linéaire de l'approximation de Fresnel (13) est biaisée. En termes de reconstruction d'image, cela signifie simplement que celle-ci subit une distorsion. Lorsque θ est inférieur à $\pi/4$, la direction effective du dépointage n'est pas cet angle θ , mais un angle $\theta + \psi$ tel que $\sin(\theta + \psi) = \tan \theta$. L'erreur ψ est nulle sur l'axe, mais croît jusqu'à $\pi/4$ lorsque θ atteint $\pi/4$. La distorsion reste faible tant que θ ne dépasse pas 15° , voire 30° , mais devient très importante au delà.

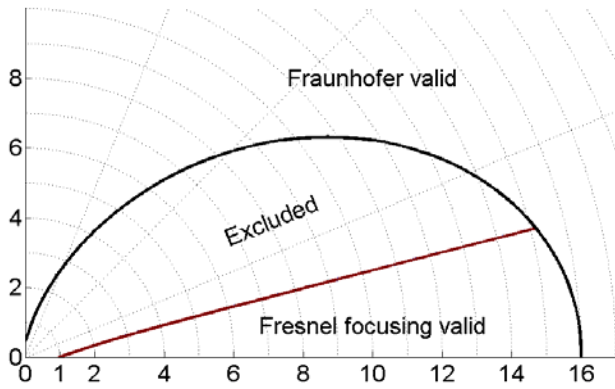


Figure 11. Zones où les approximations de Fraunhofer (6) et quadratique (13) sont pertinentes ($\alpha = 1, L = 32\lambda$).

3 Approximation optimisée

On cherche à réduire le nombre d'opérations pour constituer des images avec un réseau linéaire. Sur ce plan, l'approximation quadratique stricte (2) n'est pas très économique : elle élimine certes le calcul d'une racine carrée, mais impose toujours un calcul spécifique pour chaque point image. A cet égard, l'approximation axiale (9) est très avantageuse, puisque la courbure (terme quadratique) n'est à calculer qu'une seule fois par portée, le dépointage étant traité dans un second temps. En revanche, l'utilisation de la courbure associée à une focalisation axiale limite l'extension latérale de validité de la méthode. Se référant à la formulation (2), on évalue d'abord l'impact d'une direction θ_0 fixe (Fig. 12) :

$$\mu_0 = -u \sin \theta + (u^2 \cos^2 \theta_0) / 2. \quad (15)$$

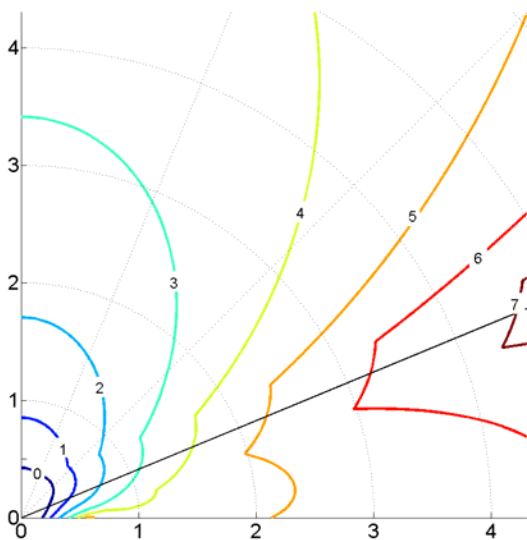


Figure 12. Limites de l'approximation quadratique avec un coefficient du second degré constant (ici $\theta_0 = \pi/8$). Voir aussi Fig. 9 ($\theta_0 = 0$) et Fig. 7 ($\theta_0 = \pi/2$).

La question soulevée ici est l'optimisation de l'angle θ_0 en fonction de la portée pour élargir au maximum le domaine angulaire de validité. A partir d'une cartographie 3D de $w(\rho, \theta, \theta_0)$, on détermine les intersections à portées constantes de la nappe (Fig. 13) correspondant à une dimension particulière w d'antenne

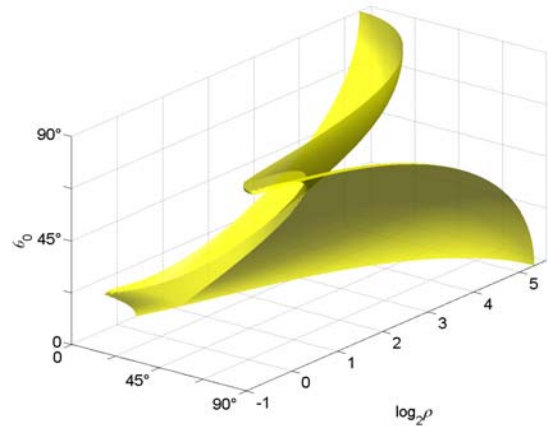


Figure 13. Nappe $w(\log_2 \rho, \theta, \theta_0) = 80$ (θ horizontal)

L'analyse de ces coupes permet d'établir les valeurs $\theta_{0 \text{ opt}}^{(w)}(\rho)$ optimales qui donnent la plus grande ouverture $\theta_{\text{max}}^{(w)}(\rho)$ possible. On constate que $\cos^2 \theta_{0 \text{ opt}}^{(w)}(\rho)$ est quasiment linéaire avec la portée (Fig. 14). Ceci est dû au fait que l'angle optimal $\theta_{0 \text{ opt}}^{(w)}(\rho)$ est approximativement la valeur maximale qu'il peut prendre sur l'axe.

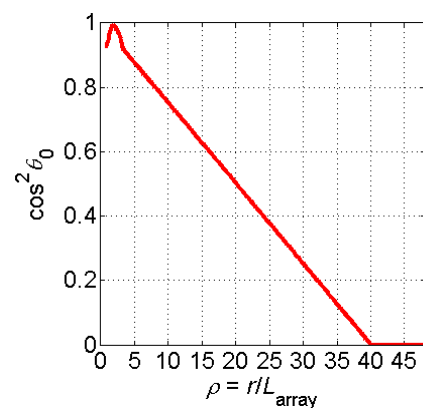


Figure 14. Evolution de $\cos^2 \theta_{0 \text{ opt}}^{(w=80)}(\rho)$ ($L = 80\lambda$).

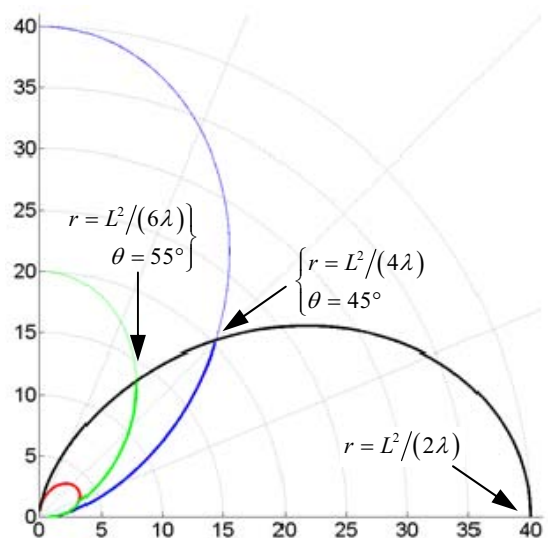


Figure 15. Limite de validité des différentes approximations ($w = 80$) rouge : quadratique strict ; vert : quadratique optimisé ; bleu : quadratique axial ; noir : Fraunhofer.

Le gain de l'approximation avec coefficient du second degré optimisé par rapport à la focalisation avec courbure axiale est illustré Fig.15. L'approximation de Fraunhofer devient préférable à l'approximation optimisée au point de transition ($\rho \approx w/6$ $\theta \approx 55^\circ$).

Le critère consistant à limiter à $\alpha\lambda/4$ l'écart maximal sur l'antenne entre les temps de vol exacts et les approximations ne garantit pas a priori la qualité des fonctions d'étalement de point dans tout le domaine de validité. Nous avons effectué un test avec une antenne de longueur $L = 80 \lambda$ ($\alpha=1$). L'examen des diagrammes de directivité fait apparaître deux phénomènes. Le calcul approché induit d'une part un léger décalage angulaire de la position du maximum. D'autre part, le niveau de ce maximum est légèrement affaibli par rapport au résultat obtenu en focalisant exactement. On constate cependant que sur l'ensemble du domaine de validité, l'affaiblissement maximal est limité à -1 dB (Fig. 16-haut), et que le décalage angulaire est négligeable (quelques centièmes de degrés en général, atteignant seulement 0.1° sur une très petite zone). On a aussi calculé l'altération de l'ouverture à -3dB induite par l'approximation. Ici encore, l'écart reste limité à quelques pourcents (Fig. 16-bas).

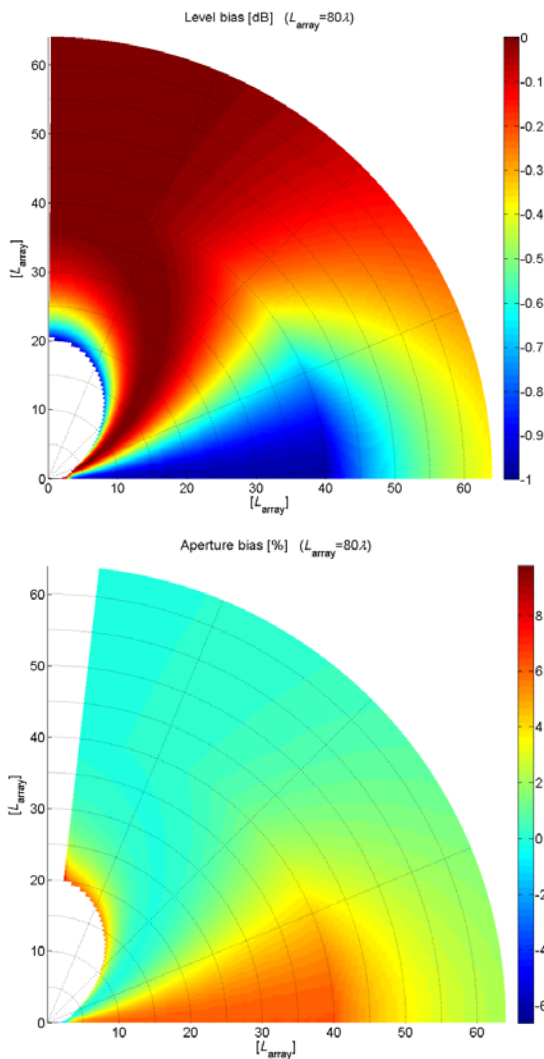


Figure 16. Haut : niveaux aux points focaux (dB réf. focalisation exacte) ; bas : altération (%) des ouvertures à -3dB due à l'approximation ($w = 80$).

Pour apprécier l'intérêt de cette optimisation, considérons un système échographique dont la source d'émission est située à l'origine O. Les éléments (d'abscisse y) du réseau linéaire reçoivent des signaux notés $s_y(t)$, l'origine des temps étant calée au centre du signal transmis. Avec la technique classique de décalage et somme des signaux reçus, une image est formée en réalisant pour chacun de ses points (r, θ) l'opération suivante

$$p(r, \theta) = \sum_y s_y \left(c^{-1} (2r + d(y, r, \theta)) \right), \quad (16)$$

La technique impose donc le calcul de $n_p \times n_e$ temps de vol, où n_p est le nombre de pixels dans l'image, et n_e est le nombre d'éléments constituant le réseau de réception. L'approximation (15) prend la forme

$$d = -y \sin \theta + y^2 \eta(r) \text{ où } \eta(r) = \cos^2 \theta_0 (L^{-1}r) / (2r) \quad (17)$$

L'intérêt de l'optimisation réside dans la division des décalages en deux étapes pour former une image sectorielle. La courbure est d'abord prise en compte avec la transformation non linéaire suivante de l'échantillonnage des signaux reçus

$$s_y^{(c)}(t) = s_y \left(t + c^{-1} y^2 \eta(ct/2) \right). \quad (18)$$

Avec (18), c'est donc l'ensemble de tous les échantillons reçus $s_y(t)$ qui subit une seule transformation de décalages/interpolations pour produire $s_y^{(c)}(t)$.

Dans la seconde étape, une seule transformation est associée à chaque direction de dépointage θ :

$$s_y^{(\theta)}(t) = s_y^{(c)} \left(t - c^{-1} y \sin \theta \right), \quad (19)$$

La sommation sur les éléments y de chaque ensemble $s_y^{(\theta)}(t)$ fournit ainsi des radiales complètes :

$$p^{(a)}(r = ct/2, \theta) = \sum_y s_y^{(\theta)}(t). \quad (20)$$

Le volume des opérations associées à (18) est quantifiable par le produit $n_r \times n_e$ où n_r est le nombre de portées formant l'image auxquelles sont associées autant de courbures à implémenter sur les n_e éléments du réseau de réception. Le volume des opérations à implémenter avec (19) est de l'ordre de $n_\theta \times n_e$, où n_θ est le nombre de radiales formant l'image. La charge complète de calcul est ainsi de l'ordre de $n_e \times (n_r + n_\theta)$, soit un ordre de grandeur inférieur à la charge $n_e \times n_r \times n_\theta$ requise par le calcul strict.

References

- [1] W.G. Rees, The validity of the Fresnel approximation, *Eur. J. Phys.* **8**, 44-48, 1987.
- [2] W.H. Southwell, Validity of the Fresnel approximation in the near field, *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 7-14, 1981