



Full-field reconstruction from scanned measurements without references: the latent variable approach

J. Antoni

LVA, INSA, University of Lyon, Bâtiment St. Exupéry, 25 bis avenue Jean Capelle, F-69621
Villeurbanne, France
jerome.antoni@insa-lyon.fr

La dimension ainsi que la résolution spatiale du champ source qui peut être reconstruit à partir d'un nombre limité de mesures microphoniques est fondamentalement limitée par le nombre de microphones et les dimensions de l'antenne. Il n'existe à ce jour guère de solutions pour outrepasser cette limite. L'approche qui consiste à déplacer l'antenne et à juxtaposer les solutions d'une série de problèmes locaux est largement sous-optimale est sujette à d'inévitables erreurs de bords : le problème bien posé consiste à reconstruire le champ source complet à partir d'une série de mesures successives correspondant à des positionnements de l'antenne en différents emplacements qui le recouvrent. Ainsi formulé, le problème s'apparente à une analyse factorielle avec variables latentes cachées (les sources). Cette thématique, riche en retombées mais difficile du point de vue théorique est actuellement en cours d'étude.

1 Introduction

L'imagerie acoustique consiste à reconstruire la distribution des sources de bruit à partir de mesures du champ acoustique qu'elles rayonnent à une certaine distance. Dans la majorité des cas, les mesures sont réalisées à l'aide d'une antenne de microphones, dont la taille forcément réduite pour des raisons de coût et d'encombrement, impose des limites strictes à la capacité de reconstruction. Par exemple, les méthodes en champ proche nécessitent idéalement que l'antenne recouvre la totalité du champ source (voire largement plus pour la version classique de NAH basée sur la transformation de Fourier discrète spatiale) et ceci avec une densité d'autant plus importante de microphones qu'il s'agit de monter en fréquence. Etant donné un nombre fixe de microphones (de voies de mesures), ces deux contraintes sont antagonistes. Par ailleurs, même si un compromis peut être atteint, il ne le sera que pour une dimension précise de l'objet à étudier et la géométrie d'antenne correspondante s'adaptera difficilement à un objet plus grand ou plus petit. Un autre exemple classique est donné par la formation de voies qui nécessite idéalement une densité de microphones qui s'adapte avec le domaine fréquentielle d'étude afin de conserver une résolution spatiale constante. Enfin, certains objets de forme complexes (par exemple oblongues) se prêtent mal à une analyse avec une antenne stationnaire de forme classique.

Pour toutes ces raisons, il est souvent nécessaire en contexte industriel – lorsqu'une antenne spécifique ne peut pas être systématiquement construite sur mesure – de procéder à une série de prises de mesures consécutives en déplaçant une même antenne à différentes positions devant ou autour de l'objet d'intérêt. Contrairement au cas où toutes les mesures sont réalisées simultanément, cette pratique se heurte à la difficulté de ne pas avoir un accès direct aux relations de phase entre les signaux issus de mesures consécutives, information qui est pourtant capitale à la mise en oeuvre des algorithmes de rétropropagation (holographie acoustique, méthode des sources équivalentes, BEM, ...) ou de localisation (formation de voies) [1]-[4]. Il existe principalement deux approches classiques qui permettent de contourner cette difficulté, chacune avec ses limites. La première consiste à utiliser un ensemble de signaux de références fixes, fortement corrélées avec le champ source, qui permettent de reproduire indirectement les relations de phase entre mesures consécutives [8]-[13]. La faisabilité de cette approche repose essentiellement sur la disponibilité de références caractérisées par un excellent rapport signal-à-bruit et en nombre suffisant pour reproduire la dimension stochastique du champ source (nombre de sources décorréliées qui le compose). Il est par ailleurs clair que les mesures supplémentaires réservées aux références se

fait au détriment du nombre de voies de mesures disponibles pour les microphones. La deuxième approche, plus récente, consiste à s'affranchir de références et à réaliser les mesures consécutives en champ très proche ("patch holography"), de manière à pouvoir supposer que le champ rayonné par les sources au droit de l'antenne est essentiellement mesuré et peu affecté par le rayonnement en dehors de la zone couverte [14]-[18]. A partir de cette hypothèse de base, des procédures itératives sont envisageables pour assurer la continuité de la distribution reconstruite aux frontières des zones couvertes.

Cet article propose une approche radicalement différente de celles connues dans l'état de l'art. L'idée centrale consiste à représenter le champ source à l'aide de variables cachées, dont on cherchera à reconstruire la matrice de covariance qui reproduit au mieux les prises de mesures consécutives. L'approche s'affranchit complètement de la nécessité des signaux de références (bien qu'elle puisse facilement être adaptée à la prise en compte de leur éventuelle présence) et ne suppose pas que le champ mesuré soit rayonné uniquement par la zone couverte. La seule hypothèse utilisée est que le champ acoustique rayonné est statistiquement stationnaire. Par conséquent, il est théoriquement possible de synthétiser virtuellement n'importe quel type d'antenne par simple déplacement d'une antenne prototype. Ceci permet non seulement de couvrir une large surface rayonnante, quelle que soit sa forme, mais aussi de modifier à souhait la densité de microphones et de réaliser de synthétiser des mesures multi-couches. Les mesures ainsi synthétisées pourront servir à alimenter n'importe quel type d'algorithme de rétropropagation. L'objectif de cet article est essentiellement de donner les fondements théoriques de cette approche. Dans un premier temps, une modélisation stochastique du champ source à l'aide de variables latentes est proposée. La résolution du problème inverse est ensuite formalisée dans le cadre de l'inférence bayésienne et réalisée à l'aide de l'algorithme EM. Un critère original pour le réglage du paramètre de régularisation, élément crucial pour l'inversion acoustique, est également préconisé. Enfin, des exemples de validation sont donnés sur des signaux simulés.

2 Paramétrisation du problème

Les objectifs mentionnés ci-dessus impliquent la résolution d'un problème inverse dont les paragraphes suivants décrivent les caractéristiques.

2.1 Paramétrisation du problème

Soit $s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)$, $\mathbf{r} \in \Gamma$ la distribution source (champ de pression ou de vitesse normal) que l'on cherche à

caractériser sur une surface source Γ et en une fréquence de travail ω . L'hypothèse fondamentale adoptée dans cet article est l'interprétation de la distribution source en tant que champ stochastique stationnaire, d'où la dépendance en l'évènement $\zeta \in \Omega$ qui appartient à l'ensemble des réalisations possibles qui peuvent résulter de la complétion d'une expérience. La problématique qui nous motive consiste à savoir reconstruire soit *i*) des réalisations $s(\mathbf{r}, \omega; \zeta_j)$ du champ source par tirages aléatoires dans l'ensemble des évènements Ω , soit (ce qui est équivalent) *ii*) la valeur quadratique moyenne $\mathbb{E}\{|s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)|^2\}$ à l'aide de mesures de pression fournies par une antenne de microphones susceptibles d'être déplacées en différentes positions. Notons $\mathbf{r}_{m,i}$ la position du $m^{\text{ième}}$ microphone, $m = 1, \dots, M$, pour la $i^{\text{ième}}$ position de l'antenne, $i = 1, \dots, P$, et $p(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta)$ la pression acoustique mesurée en ce point. Notons que pour un microphone donné (m fixé), les P pressions qui résultent du déplacement de l'antenne en P positions différentes sont mesurées *consécutivement*, c'est-à-dire sans relations de phase, au contraire des M pressions qui sont mesurées *simultanément* par les M microphones de l'antenne en une position donnée de celle-ci (i fixé).

Le problème direct qui lie les pressions mesurées au champ source est supposé connu et donné sous la forme de l'équation intégrale

$$p(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}_{m,i}|\mathbf{r})s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)d\Gamma(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta), \quad m = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, P \quad (1)$$

où $G(\mathbf{r}_{m,i}|\mathbf{r})$ est la fonction de Green (connue analytiquement ou numériquement) entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}_{m,i}$ et $n(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta)$ un bruit de mesure additif indépendant de $s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)$.

Afin de discrétiser le problème, développons la distribution source sur une base de fonctions spatiale $\{\phi_k(\mathbf{r}, \omega)\}_{k=1}^K$ judicieusement choisie [5][6] :

$$s(\mathbf{r}, \omega; \zeta) = \sum_{k=1}^K c_k(\omega; \zeta)\phi_k(\mathbf{r}, \omega) \quad (2)$$

Notons pour une fréquence de travail ω fixée, les K coefficients $c_k(\omega; \zeta)$ qui portent les fonctions de base $\phi_k(\mathbf{r}, \omega)$ s'interprètent comme K variables aléatoires qui génèrent le champ stochastique $s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)$. L'équation directe (1) devient

$$p(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta) = \sum_{k=1}^K H_{m,i,k}(\omega)c_k(\omega; \zeta) + n(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta), \quad m = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, P \quad (3)$$

avec $H_{m,i,k}(\omega) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}_{m,i}|\mathbf{r})\phi_k(\mathbf{r}, \omega)d\Gamma(\mathbf{r})$. Les K coefficients $c_k(\omega; \zeta)$ qui apparaissent dans l'équation (3) sont les inconnues du problème. Etant donné qu'il s'agit de variable aléatoires, la résolution du problème inverse consiste à trouver la densité de probabilité conjointe qui les génère à partir des mesures disponibles. Soit N_i le nombre de snapshots disponibles à la position i . Nous posons $\mathbf{p}_{ij} \in \mathbb{C}^M$ le vecteur colonne des M pressions acoustiques $\{p(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta_{ij})\}_{m=1}^M$ acquises au $j^{\text{ième}}$ snapshot de la $i^{\text{ième}}$ position de l'antenne, $\mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{C}^K$ le vecteur des K coefficients $\{c_k(\omega; \zeta_{ij})\}_{k=1}^K$, $\mathbf{n}_{ij} \in \mathbb{C}^M$ le vecteur de bruit additif $\{n(\mathbf{r}_{m,i}, \omega; \zeta_{ij})\}_{m=1}^M$ et $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{M \times K}$ la matrice qui contient les éléments $[\mathbf{H}_i]_{mk} = H_{m,i,k}(\omega; \zeta)$. Le problème

direct se reformule alors sous la forme plus concise

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{H}_i\mathbf{c}_{ij} + \mathbf{n}_{ij}, \quad i = 1, \dots, P, \quad j = 1, \dots, N_i \quad (4)$$

Il sera supposé par la suite que $\mathbf{n}_{ij}$ suit une loi normale complexe de moyenne nulle et de matrice de covariance $\beta_i^2\mathbf{\Omega}_i$ dont la cohérence spatiale $\mathbf{\Omega}_i$ est supposée connue (normalisée selon $\text{tr}\{\mathbf{\Omega}_i\} = M$) et dont la puissance moyenne β_i^2 est un paramètre inconnu [6].

2.2 Formulation du problème inverse

L'inversion du système (4) pour chaque position i (selon l'approche réalisée "patch holographie" [14]-[18]) est, dans le cas général, largement sous-déterminée et ne garantit aucunement de restituer les réalisations des mêmes variables aléatoires $\{c_k(\omega; \zeta)\}_{k=1}^K$. Cependant, du point de vue stochastique et sous l'hypothèse de stationnarité de la distribution source, il apparaît que la *même* matrice de covariance des coefficients $c_k(\omega; \zeta)$ est observée quelque soit la position de l'antenne. En effet, posons $\mathbf{C}_{pp}^{(i)} \triangleq \mathbb{E}\{p_{ij}p_{ij}^H\}$ et $\mathbf{C}_{cc} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{c}_{ij}\mathbf{c}_{ij}^H\}$ les matrice de covariance des pressions et des coefficients à la position i . Notons que $\mathbf{C}_{cc}$ est indépendante de l'indice i par définition de la stationnarité de la source. Les matrices de covariance sont théoriquement liées par l'équation

$$\mathbf{C}_{pp}^{(i)} = \mathbf{H}_i\mathbf{C}_{cc}\mathbf{H}_i^H + \beta_i^2\mathbf{\Omega}_i, \quad i = 1, \dots, P \quad (5)$$

Avec $\mathbf{C}_{pp}^{(i)}$ substitué par son estimateur

$$\hat{\mathbf{C}}_{pp}^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{ij}^H \quad (6)$$

moyenné sur plusieurs snapshots, il vient

$$\hat{\mathbf{C}}_{pp}^{(i)} \simeq \mathbf{H}_i\mathbf{C}_{cc}\mathbf{H}_i^H + \beta_i^2\mathbf{\Omega}_i, \quad i = 1, \dots, P \quad (7)$$

qui peut être rigoureusement résolu par rapport aux inconnues $\mathbf{C}_{cc}$ et β_i^2 et permet *in fine* d'estimer la valeur quadratique moyenne du champ source selon

$$\mathbb{E}\{|s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)|^2\} = \sum_{k,l=1}^K \phi_k(\mathbf{r}, \omega) [\hat{\mathbf{C}}_{cc}]_{kl} \phi_l(\mathbf{r}, \omega) \quad (8)$$

D'un point de vue purement statistique, le problème se ramène à une analyse factorielle généralisée, c'est-à-dire à une certaine factorisation de l'ensemble des matrices spectrales $\mathbf{C}_{pp}^{(i)}$ (aussi appelé "structured-covariance estimation" [19]). Bien qu'envisageable, la factorisation directe de la forme (7) (par exemple par moindres carrés ou par maximum de vraisemblance) est cependant délicate pour différentes raisons :

1. il importe de préserver le caractère défini non-négatif de $\mathbf{C}_{cc}$ et de β_i^2 ,
2. il importe de régulariser le problème, de sorte que les éléments de $\mathbf{C}_{cc}$ ne prennent pas de valeurs absolues anormalement élevées aux fréquences où la matrice de transfert $\mathbf{H}_i$ est mal conditionnée (le cas critique étant celui où une colonne de $\mathbf{C}_{cc}$ appartient au noyau de $\mathbf{H}_i$),
3. l'estimation de $\mathbf{C}_{cc}$, plutôt que les variables aléatoires $c_k(\omega; \zeta)$ elles-mêmes, se prête mal à la reconstruction de réalisations du champ source $s(\mathbf{r}, \omega; \zeta)$.

Afin de palier ces difficultés, nous proposons de reparamétriser le problème à l'aide de variables cachées (dites "latentes"), ε_l , $l = 1, \dots, S$, $S \leq K$, identiquement et indépendamment distribuées selon des lois normales complexes centrées réduites imposées :

$$c_k(\omega; \zeta) = \sum_{l=1}^S \lambda_{kl}(\omega) \varepsilon_l(\zeta), \quad k = 1, \dots, K \quad (9)$$

Il vient alors

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{H}_i \mathbf{\Lambda} \varepsilon_{ij} + n_{ij}, \quad i = 1, \dots, P \quad (10)$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{C}^S$ le vecteur des ε_l et $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{K \times S}$ la matrice de poids factorielles qui rassemble les nouvelles inconnues du problème. Par construction, $\mathbf{\Lambda}$ vérifie $\mathbf{\Lambda} \mathbb{E}\{\varepsilon \varepsilon^H\} \mathbf{\Lambda}^H = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^H = \mathbf{C}_{cc}$ et donc la contrainte de non-négativité de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{cc}$. De plus, mis sous la forme (10), le problème de factorisation (7) devient linéaire dans les paramètres ; il peut être résolu de manière efficace (cf. section 4) en utilisant tous les résultats de la régression classique comme si le vecteur ε était connu : ceci garantira la non-négativité de β_i^2 en tant qu'estimateur de la variance des erreurs quadratique et permettra surtout d'appliquer toute technique de régularisation classique. Enfin, la forme (10) présente un certain intérêt physique, car les ε_l s'y interprètent comme un ensemble de S sources décorréllées qui génèrent (et permette de simuler de cette manière) le champ stochastique

$$s(\mathbf{r}, \omega; \zeta) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^S \phi_k(\mathbf{r}, \omega) \lambda_{kl}(\omega) \varepsilon_l(\zeta) \quad (11)$$

par superposition des fonctions d'onde $\phi_l(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{k=1}^K \phi_k(\mathbf{r}, \omega) \lambda_{kl}(\omega)$. Une dimension stochastique $S < K$ entrainera d'ailleurs une diminution significative du nombre d'inconnues à estimer. Notons pour finir que la paramétrisation (10) n'est pas unique, car la post-multiplication de $\mathbf{\Lambda}$ par n'importe quelle matrice unitaire continue à produire la même matrice de covariance $\mathbf{C}_{cc}$. Bien qu'il soit possible de forcer une forme unique pour $\mathbf{\Lambda}$ (par exemple forme triangulaire supérieure), nous n'avons pas remarqué que l'inflation de complexité qu'une telle approche implique entraîne une amélioration significative des résultats.

3 Critères bayésiens d'inversion

3.1 Probabilité a posteriori

Nous proposons dans cette section d'estimer les inconnues $\theta = (\mathbf{\Lambda}, \beta_i^2)$ qui figurent dans le modèle stochastique (10) à partir de l'inférence bayésienne. Cette approche présente de nombreux avantages pour la résolution du problème acoustique inverse, dont en particulier un mécanisme de régularisation interne [5]-[7]. Elle consiste à considérer toutes les variables inconnues comme aléatoires. Nous chercherons donc la solution θ la plus probable étant donné l'observation des mesures $\{\mathbf{p}_{ij}\} \triangleq \{\mathbf{p}_{ij}; i = 1, \dots, P; j = 1, \dots, N_i\}$, c'est-à-dire qui maximise densité de probabilité a posteriori $[\theta|\{\mathbf{p}_{ij}\}]$ ($[X]$ dénote la densité de probabilité de la variable aléatoire X et $[X|Y]$ la densité de probabilité de X conditionnée à

l'observation Y). Par application de la règle de Bayes, il vient

$$[\theta|\{\mathbf{p}_{ij}\}] \propto [\{\mathbf{p}_{ij}|\theta\}] [\theta] \quad (12)$$

où $[\theta]$ représente la densité de probabilité a priori de θ .

3.2 Probabilité a priori

Le choix des probabilités a priori joue un rôle décisif pour stabiliser le problème inverse : c'est le mécanisme qui permet de compenser dans une certaine mesure la perte d'information caractéristique à d'un problème mal posé. Pour simplifier, nous supposons que $[\beta_i^2] \propto 1$. Par contre, la spécification de $[\mathbf{\Lambda}]$ est importante pour interdire (régulariser) les valeurs anormalement élevées de $\mathbf{\Lambda} \varepsilon_{ij}$ dans le modèle (10). Nous proposons dans ce travail d'utiliser la loi

$$[\mathbf{\Lambda}] = (\alpha^2 \pi / S)^{-KS} e^{-S \alpha^{-2} \text{tr}\{\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{\Lambda}\}} \quad (13)$$

qui implique que les éléments λ_{ij} sont indépendamment et identiquement distribués selon une loi complexe normale de moyenne nulle et de variance α^2 , telle que $\mathbb{E}\{\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^H\} = \alpha^2$. Le réglage de l'hyperparamètre α^2 permettra par la suite de contrôler la régulation du problème inverse.

3.3 Algorithme EM

La maximisation directe de la probabilité a posteriori (12) est un problème difficile qui est considérablement simplifié après introduction des variables latentes ε_l . Il vient alors

$$\begin{aligned} \ln [\{\mathbf{p}_{ij}|\theta] [\theta] &= \ln \left(\int [\{\mathbf{p}_{ij}|\varepsilon, \theta] [\varepsilon] d\varepsilon \right) + \ln [\theta] \\ &\leq \int [\varepsilon|\{\mathbf{p}_{ij}\}] \ln [\{\mathbf{p}_{ij}|\varepsilon, \theta] + \ln [\theta] \\ &= \mathbb{E}_{\varepsilon|\{\mathbf{p}_{ij}\}} \left\{ \ln [\{\mathbf{p}_{ij}|\varepsilon, \theta] \right\} + \ln [\theta] \end{aligned} \quad (14)$$

qui découle de l'inégalité de Jensen. La maximisation de (14) peut alors être entreprise de manière itérative selon l'algorithme EM (expectation-maximisation) qui alterne les étapes [20]-[21]

1. Espérance : $J(\theta|\theta_{[n]}) = \mathbb{E}_{\varepsilon|\{\mathbf{p}_{ij}\}, \theta_{[n]}} \left\{ \ln [\{\mathbf{p}_{ij}|\varepsilon, \theta] \right\} + \ln [\theta]$
2. Maximisation : $\theta_{[n+1]} = \text{Arg max}_{\theta} J(\theta|\theta_{[n]})$

Tous calculs faits et avec le choix (13), nous obtenons les itérations suivantes :

1. Espérance :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{p\varepsilon}^{(i)} = \hat{\mathbf{S}}_{pp}^{(i)} \mathbf{B}_i^H \\ \mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{I} - \mathbf{B}_i \mathbf{H}_i \mathbf{\Lambda}_{[n]} + \mathbf{B}_i^H \hat{\mathbf{S}}_{pp}^{(i)} \mathbf{B}_i \end{cases} \quad (15)$$

avec

$$\mathbf{B}_i = (\mathbf{\Lambda}_{[n]}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{\Lambda}_{[n]} + \beta_{i,[n]}^2)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{[n]}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-1} \quad (16)$$

2. Maximisation :

$$\begin{aligned} \text{vec}\{\mathbf{\Lambda}_{[n+1]}\} &= \left[\sum_{i=1}^P \beta_{i,[n]}^{-2} \left(\mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)T} \otimes (\mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{H}_i) + \frac{S}{\alpha^2} \mathbf{I} \right) \right]^{-1} \\ &\times \sum_{i=1}^P \beta_{i,[n]}^{-2} \text{vec}\left\{ \mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{Q}_{p\varepsilon}^{(i)} \right\} \\ \beta_{i,[n+1]}^2 &= \frac{1}{M} \text{tr} \left\{ \mathbf{\Omega}_i^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{pp}^{(i)} - 2 \text{Herm} \left\{ \mathbf{\Lambda}_{[n]}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{Q}_{p\varepsilon}^{(i)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{\Lambda}_{[n]} \mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_{[n]}^H \mathbf{H}_i^H \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

où vec est l'opérateur qui concatène les colonnes d'une matrice les unes au-dessus des autres, $\text{tr}\{\mathbf{A}\}$ est la trace de $\mathbf{A}$ et $\text{Herm}\{\mathbf{A}\} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^H$.

L'algorithme EM fait apparaître de manière explicite que les matrices de covariances empiriques $\hat{\mathbf{S}}_{pp}^{(i)}$ sont les *statistiques suffisantes* du problème, c'est-à-dire les seules nécessaires à sa résolution.

3.4 Régularisation

Les équations (16) et (2) font toute deux apparaître des matrices à inverser dont le bon conditionnement dépend directement des valeurs attribuées aux puissances du bruit, $\beta_{i,[n]}^2$, et du champ source α^2 . Dans le formalisme proposé, $\beta_{i,[n]}^2$ est une variable du problème qui s'ajuste à chaque itération n selon l'équation (17). Par contre l'hyperparamètre α^2 nécessite un réglage *a priori* relativement délicat étant donné son importance sur la qualité des résultats. Poursuivant selon la démarche introduite dans [5], nous proposons de trouver la valeur de α^2 qui maximise la probabilité marginale $[\{\mathbf{p}_{ij}\}] = \int [\{\mathbf{p}_{ij}\}|\theta][\theta] d\theta$. Tous calculs faits et après avoir approché la loi de $\Lambda\epsilon$ par une normale complexe, α^2 est solution du minimum de la fonction

$$J(\alpha^2) = \sum_{i=1}^P \sum_{m=1}^M \left(\ln(\alpha^2 s_{m,i}^2 + \beta_i^2) + \frac{u_{m,i}^H \mathbf{\Omega}_i^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{S}}_{pp}^{(i)} \mathbf{\Omega}_i^{-\frac{1}{2}} u_{m,i}}{\alpha^2 s_{m,i}^2 + \beta_i^2} \right) \quad (18)$$

où $s_{m,i}^2$ et $u_{m,i}$, $m = 1, \dots, M$, sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice $\mathbf{\Omega}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \mathbf{\Omega}_i^{-\frac{1}{2}}$. En l'absence de valeurs initiales sur les puissances du bruit, la fonction (18) devra être conjointement minimisée par rapport aux paramètres β_i^2 .

3.5 Déficit d'information

Il est légitime à ce stade de s'enquérir si la reconstruction du champ source par mesures consécutives est capable de restituer des résultats de qualité comparable à ceux qui auraient été obtenus à l'aide de mesures simultanées. La question se ramène à savoir si l'ensemble (10) de P mesures consécutives de M pressions acoustiques contient la même quantité d'information que PM mesures simultanées

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{H}\Lambda\epsilon_j + n_j \quad (19)$$

où $\mathbf{H}^T = [\mathbf{H}_1^T \dots \mathbf{H}_P^T]^T$, pour un nombre identique de snapshots, $N_i = N$, $i = 1, \dots, P$. Etant donné notre modèle stochastique, l'information de Shannon des mesures consécutives s'exprime

$$\begin{aligned} H_{(M,P)} &= \sum_{i=1}^P H_{(M,1)} \\ &= \sum_{i=1}^P N \left(M \ln \pi e + \ln |\alpha^2 \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H + \beta_i^2 \mathbf{\Omega}_i| \right) \end{aligned} \quad (20)$$

et celle des mesures simultanées

$$\begin{aligned} H_{(MP,1)} &= NPM \ln \pi e \\ &+ \ln \left| \alpha^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \begin{bmatrix} \beta_1^2 \mathbf{\Omega}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_P^2 \mathbf{\Omega}_P \end{bmatrix} \right| \end{aligned} \quad (21)$$

Il est possible de montrer que l'inégalité $H_{(MP,1)} \geq H_{(M,P)}$ est toujours vraie. L'égalité n'est possible que lorsque $\mathbf{H}_p \mathbf{H}_i^H = 0$ pour tous les couples d'indices tel que

$p \neq i$ et donc de même pour tous les interspectres $\mathbb{E}\{\mathbf{p}_{pj} \mathbf{p}_{ij}^H\} = \mathbf{H}_p \mathbb{E}\{\Lambda \epsilon_{pj} \epsilon_{ij}^H \Lambda^H\} \mathbf{H}_i^H$ puisque $\mathbb{E}\{\Lambda \epsilon_{pj} \epsilon_{ij}^H \Lambda^H\} = \mathbf{I}$. Dans tous les autres cas l'information irrémédiablement manquante correspond donc aux relations de phase qui ont été perdues entre les positions successives, p et i , de l'antenne. Cette conclusion ne veut cependant pas dire que la reconstruction complète de la source n'est pas possible par mesures consécutives. En effet, l'information (20) est une fonction croissante du nombre P de positions de l'antenne ; il importe simplement que ce nombre soit suffisamment grand pour que l'information de Shannon $H_{(M,P)}$ soit supérieur à l'information nécessaire à la reconstruction du champ source.

4 Exemple

L'algorithme proposé est illustré ci-dessous sur un exemple de simulation (des exemples sur signaux réels seront présentés lors de la conférence). Une distribution de vitesse de trois sources ponctuelles est simulée dans un plan source, à une fréquence de 500Hz, 10cm devant une antenne prototype rectangulaire plane constituée de 25 microphones. Le rapport signal-à-bruit est de 60dB et le nombre de snapshots fixé à 100.

Dans un premier temps l'antenne est déplacée très légèrement par incréments horizontaux et verticaux de 10cm en 9 positions différentes parallèlement au plan source afin d'augmenter la densité des mesures et donc la résolution spatiale théoriquement atteignable (Fig.1). Avant d'entreprendre la reconstruction, l'hyperparamètre α^2 est déterminé selon la méthode proposée dans le paragraphe 3.4 : le critère utilisé montre l'existence d'un minimum bien marqué qui permet une estimation sans ambiguïté (Fig.2). La Fig.3 montre la convergence de l'algorithme EM qui s'ensuit : au bout d'une vingtaine d'itérations seulement, l'erreur relative sur Λ et β_i^2 a chuté de trois ordres de grandeur. La Fig.4 montre le résultat obtenu, en termes de vitesse quadratique moyenne. Pour comparaison, les Fig. 5 et 6 montrent l'estimation obtenue avec une seule prise de mesure de 25 microphones et ce que permettrait des mesures simultanées avec une gigantesque antenne de $25 \times 9 = 225$ microphones. L'amélioration de la résolution spatiale que permettent les mesures consécutives est manifeste ; la méthode restitue des résultats dont la qualité est strictement comparable à celle des mesures simultanées. Le gain d'information autorisé par la multiplication des prises de mesure consécutives est illustré sur la Fig.7 et comparé à celui des mesures simultanées.

Dans un second temps, la même antenne de dimension réduite est déplacée en 4 positions différentes avec recouvrement de 25% afin de couvrir une zone plus grande, la densité de microphones restant sensiblement inchangée (cf. Fig.8). Le champ de vitesse quadratique ainsi reconstruit est représenté en Fig.11. Pour comparaison, les Fig.9 montrent les résultats obtenus avec une seule prise de mesure de 25 microphones et ce que permettrait des mesures simultanées avec une grande antenne de $25 \times 4 = 100$ microphones. Ici encore, les résultats de l'approche proposée sont tout à fait probants.

5 Conclusion

La reconstruction d'une distribution source à partir de prises de mesures consécutives sans référence de phase est un problème théoriquement délicat, mais d'une grande importance pratique. Une solution a été proposée qui découle d'une formulation probabiliste (bayésienne) du problème inverse et dont la faisabilité repose essentiellement sur une résolution itérative par l'algorithme EM. Les premiers exemples d'application sont prometteurs et justifient de poursuivre le développement de la méthode proposée.

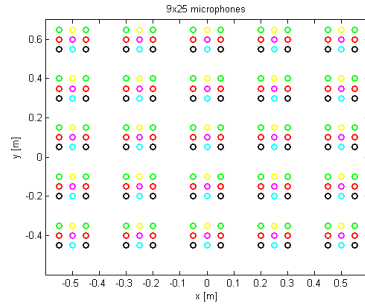


FIGURE 1 – Antenne de 25 microphones déplacée en 9 positions différentes.

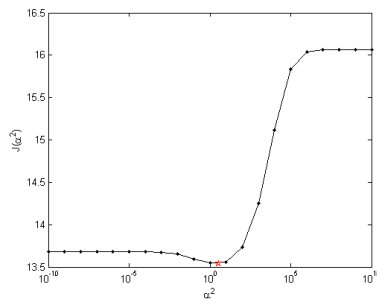


FIGURE 2 – Réglage du paramètre du régulation par sélection du minimum de $J(\alpha^2)$.

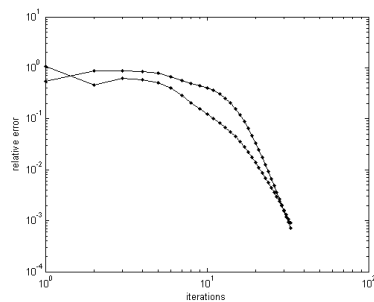


FIGURE 3 – Convergence de l'algorithme EM : évolution de la norme des erreurs relatives sur Λ et β_i^2 .

Références

- [1] J. Hald, "Basic theory and properties of statistically optimized near-field acoustic holography", *J. Acoust. Soc. Am.* **125**, 2105-2120 (2009)
- [2] K. B. Rasmussen, P. C. Hansen, "Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations", *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, 114-127 (2003)

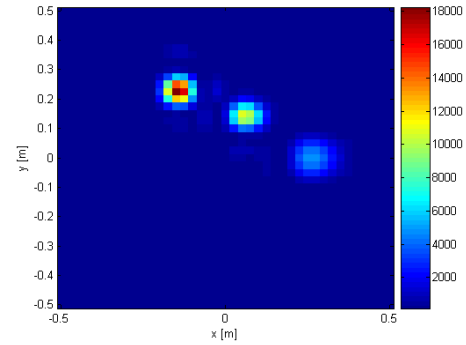


FIGURE 4 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur 9 mesures consécutives de 25 microphones (amplitude arbitraire).

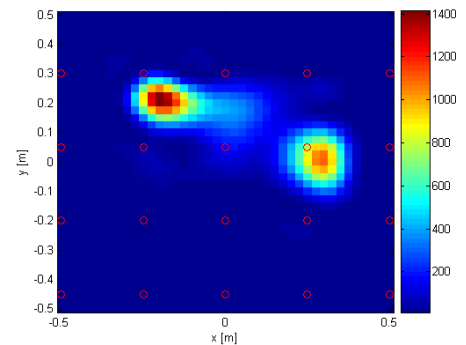


FIGURE 5 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur une mesure de 25 microphones (amplitude arbitraire).

- [3] M. A. Hamdi, A. Omrani, X. Ouisse, M. Mein, and O. Sauvage, "Presentation of a new inverse boundary element method for the determination of optimal spectral characteristics of complex noise sources", in *Proc. of the Euronoise*, 1-8, Napoli, Italy, 19-21 May 2003.
- [4] Q. Leclerc, "Acoustic imaging using under-determined inverse approaches : frequency limitations and optimal regularization", *J. Sound Vib.* **321**(321), 605-619 (2009)
- [5] J. Antoni, "Focalisation bayésienne : une approche unifiée du problème inverse en acoustique", *CFA2010, 10eme Congres Français d'Acoustique*, Lyon, France, 12-16 Avril 2010.
- [6] J. Antoni, "A Bayesian approach to sound source reconstruction : optimal basis, regularization, and focusing", *J. Acoust. Soc. Am.* **in press**.
- [7] E. Zhang, J. Antoni, P. Feissel, "Bayesian force reconstruction with an uncertain model", *J. Sound Vib.* **331**(4), 798-814 (2012)
- [8] M. A. Tomlinson, "Partial source discrimination in near field acoustic holography", *Appl. Acoustics* **57**, 243-261 (1999)
- [9] K. U. Nam, Y. H. Kim, "Visualization of multiple incoherent sources by the backward prediction of near-field acoustic holography", *J. Acoust. Soc. Am.* **109**, 1808-1816 (2001)
- [10] H. S. Kwon, Y. J. Kim, J. S. Bolton, "Compensation for source nonstationarity in multireference, scan-based near-field acoustical holography", *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, 3603-368 (2003)
- [11] Y. J. Kim, J. S. Bolton, H. S. Kwon, J. S. Bolton, "Partial sound field decomposition in multireference near-field acoustical holography by using optimally located virtual references", *J. Acoust. Soc. Am.* **115**, 1641-1652 (2004)
- [12] K. U. Nam, Y. H. Kim, "A partial field decomposition algorithm and its examples for near-field acoustic holography", *J. Acoust. Soc. Am.* **116**, 1721-1785 (2004)
- [13] M. H. Lee, J. S. Bolton, "Scan-based near-field acoustical holography and partial field decomposition in the presence of noise and source level variation", *J. Acoust. Soc. Am.* **119**, 3823-393 (2006)
- [14] J. Hald, "Patch near-field acoustical holography using a new statistically optimal method", *Proceedings of Inter-Noise* (2003)

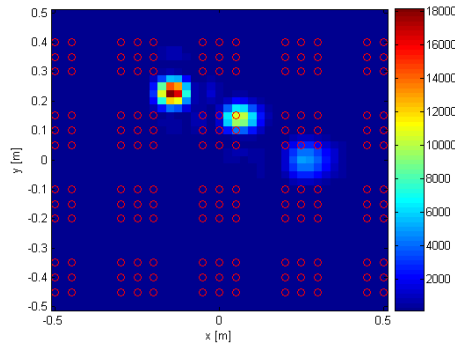


FIGURE 6 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur une mesure simultanée de 9x25 microphones (amplitude arbitraire).

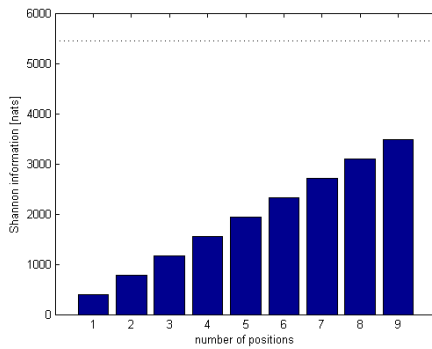


FIGURE 7 – Déficit d'information en fonction du nombre de positions de l'antenne (information apportée par les mesures simultanées = 5440 nats).

- [15] A. Sarkissian, "Method of superposition applied to patch near-field acoustic holography", *J. Acoust. Soc. Am.* **118**(2), 671-678 (2005)
- [16] M. Lee, J.S. Bolton, "A one-step patch near-field acoustical holography procedure", *J. Acoust. Soc. Am.* **122**(3), 1662-1670 (2007)
- [17] J.C. Pascal, S. Paillasseur, J.H. Thomas, J.F. Li, "Patch near-field acoustic holography : regularized extension and statistically optimized methods", *J. Acoust. Soc. Am.* **126**(3), 1264-1268 (2009)
- [18] H.C. Zhu, Z.M. Chen, X.H. Du, R.F. Mao, "Research on Patch Near-Field Acoustic Holography", *Journal Applied Mechanics and Materials* **105-107**, 196-199 (2011)
- [19] Ho. Li, P. Stoica, J. Li, "Computationally Efficient Maximum Likelihood Estimation of Structured Covariance Matrices", *IEEE Trans. Signal Processing* **47**, 1314-1323 (1999)
- [20] A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **39**(1), 138 (1977)
- [21] R. Neal, G. Hinton, "A view of the EM algorithm that justifies incremental, sparse, and other variants", *Learning in Graphical Models* **47**, (Cambridge, MA : MIT Press), 355-368 (1999)

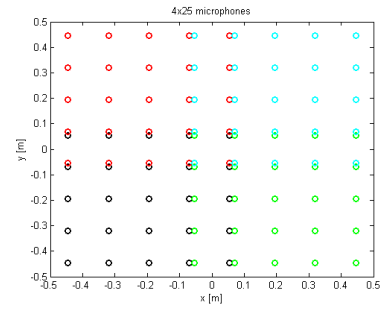


FIGURE 8 – Antenne de 25 microphones déplacée en 4 positions différentes.

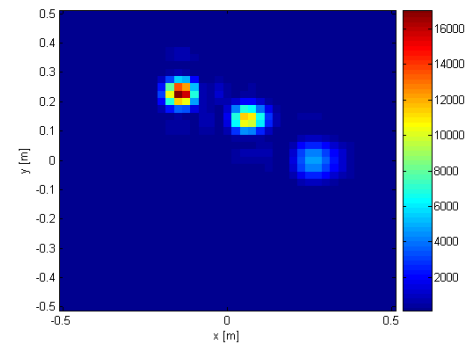


FIGURE 9 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur 4 mesures consécutives de 25 microphones (amplitude arbitraire).

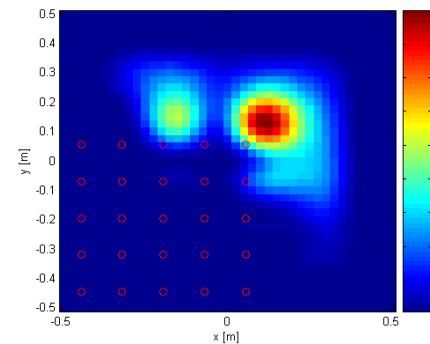


FIGURE 10 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur une mesure de 25 microphones (amplitude arbitraire).

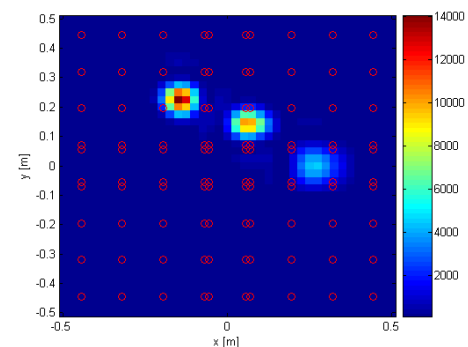


FIGURE 11 – Vitesse quadratique moyenne estimée sur une mesure simultanée de 4x25 microphones (amplitude arbitraire).